SUITES NUMÉRIQUES

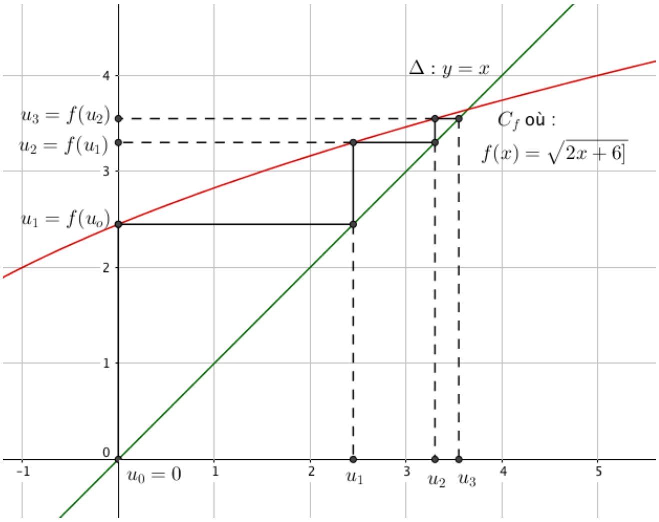
I Représentation graphiques des suites définies par une récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Méthode :

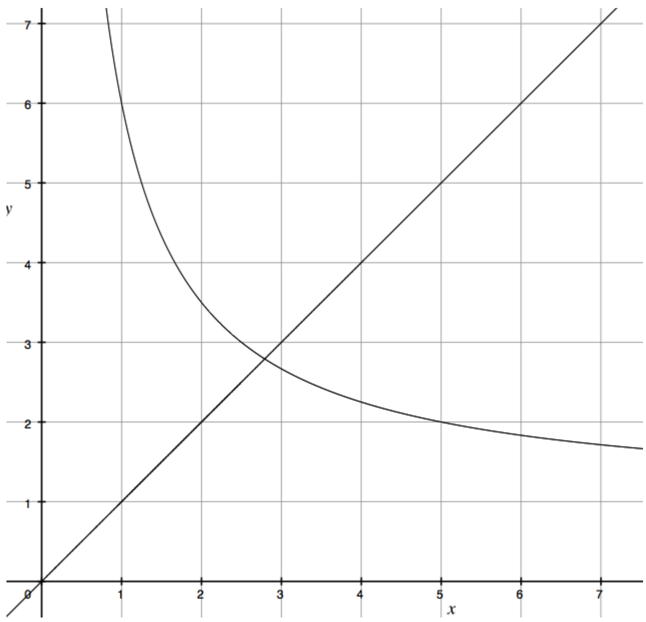
- Tracer la courbe représentative de la fonction *f*.
- Tracer la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice)
- Placer sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ le point d'abscisse u_0 .
- Placer sur l'axe $(\mathrm{O}y)$ le point d'ordonnée $u_1 = f(u_0)$: u_1 est l'image de u_0 par *f*.
- La symétrie par rapport à la première bissectrice échange les axes, ainsi les points sur $(\mathrm{O}y)$ sont transformés en points sur $(\mathrm{O}x)$. On peut donc reporter le point d'ordonnée u_1 sur $(\mathrm{O}y)$ en un point d'abscisse u_1 sur $(\mathrm{O}x)$. C'est la signification des pointillés verticaux sur le schéma ci-dessous.
- Placer sur l'axe $(\mathrm{O}y)$ le point d'ordonnée $u_2 = f(u_1)$: u_2 est l'image de u_1 par *f*.
- Placer u_2 sur $(\mathrm{O}x)$ par symétrie par rapport à la première bissectrice.
- Etc.

Exemples :

- Placer sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$ et $u_0 = 0$.



- Faire de même (au crayon à papier !) avec la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{5}{u_n} + 1$ et $u_0 = 1$.



II Suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition :Relation de récurrence (expression de u_{n+1} en fonction de u_n)	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q\cdot u_n$
Formule explicite (expression de u_n en fonction de n)	$u_n=u_0+n\cdot r$	$u_n=u_0\cdot q^n$
Somme des $n+1$ premiers termes	$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n}u_i=(n+1)u_0+r\frac{n(n+1)}{2}$ $=(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$	$1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n}u_i=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q\neq 1$
Relation entre deux termes u_n et u_p (facultatif, utile pour certains)	$u_n=u_p+r(n-p)$	$u_n=u_p\cdot q^{n-p}$

Principe des démonstrations :

- Pour $u_n=u_0+n\cdot r$, on part de la définition $u_{n+1}=u_n+r$, et soit on fait une récurrence « propre », soit on écrit plus rapidement : $u_n=u_{n-1}+r=u_{n-2}+r+r=u_{n-1}+2r=u_{n-3}+3r=\ldots=u_0+nr$ (ce qui est aussi une démonstration par récurrence, on a remplacé l'étape très simple d'hérédité par les pointillés).
- Écrivez de même la suite d'égalités pour la démonstration de $u_n=u_0\cdot q^n$
- La démonstration par récurrence de $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, comme on l'a vue, n'est pas la plus économique ! On préfère :

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} 1 & + \quad 2 & +\ldots & +n-1 & +1 \\ + \quad n & +n-1 & +\ldots & + \quad 2 & +n \\ \hline \multicolumn{5}{c}{\underbrace{(n+1)+(n+1)+\ \ldots\ +(n+1)+(n+1)}_{n\times(n+1)}} \end{array}$$

c'est-à-dire $2(1+2+\ldots+n)=n(n+1)$, CQFD

- On en déduit $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n}u_i=u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\ldots+(u_0+nr)$

$$=(n+1)u_0+r(1+2+\ldots n)=(n+1)u_0+r\frac{n(n+1)}{2}$$

- La preuve de $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n}u_i=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$ peut se faire comme celle de $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, ou bien en partant de $(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}=\dfrac{(n+1)}{2}(u_0+u_0+nr)=(n+1)u_0+r\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $u_n=u_p+r(n-p)$ est immédiat en partant de $u_n=u_0+n\cdot r$ (écrivez-le).
-
- $(1+q+q^2+\ldots+q^n)(1-q)=1-\cancel{q}+\cancel{q}-\cancel{q^2}+\cancel{q^2}-\cancel{q^3}+\ldots+\cancel{q^n}-q^{n+1}=1-q^{n+1}$ en développant

d'où pour $q \neq 1$: $1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (la deuxième égalité s'obtient en inversant les signes de la fraction).

Remarque : pour simplifier les calculs, on peut utiliser $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $0<q<1$ et $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q>1$. Pour $q<0$, les deux sont malcommodes ☺. On peut bien sûr ne retenir qu'une seule des deux expressions.

- On en déduit immédiatement

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \ldots + q^n u_0 = u_0\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

III Variation des suites.

Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante) à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$). Une suite croissante ou décroissante à parti d'un rang donné est dite monotone à partir de ce rang. Une suite constante est dite stationnaire.

Remarque : seule la monotonie de la suite nous intéresse. Par exemple on ne dira pas d'une suite qu'elle est décroissante jusqu'à $n = 5$ puis croissante après. On écrira simplement que la suite est croissante à partir de $n = 5$.

Méthodes :

Les quatre méthodes ci-dessous sont fondamentales. Je vous donne des indices pour savoir quand les appliquer, sachez néanmoins qu'il existe de nombreux cas où il faut faire preuve d'intuition pour trouver la bonne méthode.

- Étude fonctionnelle (pour les suites du type $u_n = f(n)$). On étudie la fonction *f* sur $\mathbb{R}^+$ (car *n* est un entier positif ou nul). La suite a les mêmes variations que *f*. C'est la technique la plus simple à mettre en œuvre, du coup c'est celle qui tombe le moins souvent au bac !

  Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 5n + 3$.

  On étudie la fonction *f* définie $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

  $f'(x) = 2x - 5$, donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

  La suite (u_n) est croissante pour $n \geq 3$ (le rang après $\frac{5}{2}$).

- Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode est très efficace pour les suites comportant des sommes ou des différences. C'est aussi celle que l'on utilise par défaut, quand on ne voit pas que faire d'autre.

  Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - n$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - (n+1)\right) - \left(u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - n\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$$

  Or $n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \leq 0$.

  La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$).

- Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, pour $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Cette méthode est utilisée pour les suites comportant des produits, des quotients ou des puissances.

  Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$. Les termes sont tous positifs très clairement.

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{{(n+1)^2}/{2^{n+1}}}{{n^2}/{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

  Comme on ne voit pas immédiatement si le quotient est supérieur ou inférieur à 1, on résout :

  $\frac{(n+1)^2}{2n^2} \geq 1 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 \geq 2n^2 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \leq 0$ (il y a équivalence car $2n^2 > 0$).

  $\Delta = 8$, les racines sont $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Le polynôme $p(x) = x^2 - 2x - 1$ est négatif entre les racines, et positif à l'extérieur des racines (du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines).

  $\frac{(n+1)^2}{2n^2} \geq 1 \Leftrightarrow n \in \left[1-\sqrt{2} : 1+\sqrt{2}\right]$ pour autant que cela ait un sens ($n \in \mathbb{N}$)

  Donc pour $n \geq 3$, $\frac{(n+1)^2}{2n^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$: la suite est décroissante pour $n \geq 3$.

- Récurrence. Méthode souvent évidente pour les suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Mais parfois ce n'est pas le plus rapide, l'énoncé peut donner des indices sur une méthode plus efficace. Il y a deux variantes, soit par le calcul direct, soit par l'étude de *f*.

  Exemple : soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$ et $u_0 = 0$.

  Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$. On a $u_0 \leq u_1$.

  Hérédité : Supposons que pour *n* donné, $u_n \leq u_{n+1}$

  $\Rightarrow 2u_n \leq 2u_{n+1}$ on a multiplié par 2

  $\Rightarrow 2u_n + 6 \leq 2u_{n+1} + 6$ on a ajouté 6

  $\Rightarrow \sqrt{2u_n + 6} \leq \sqrt{2u_{n+1} + 6}$ on passe à la racine (fonction croissante)

  $\Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$ vrai au rang $n + 1$

  Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré d'après l'axiome de récurrence que $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que la suite (u_n) est croissante.

  Variante : on étudie d'abord la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+6}$, définie sur $[-3;+\infty[$. Il peut y avoir des problèmes subtils d'ensemble de définition.

  Ici $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}} > 0$. La fonction *f* est croissante sur $]-3;+\infty[$.

  L'hérédité peut alors être rédigée comme suit :

  $u_n \leq u_{n+1} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$ car (1) : *f* est croissante.

  - <u>*Remarque fondamentale*</u> : $f \nearrow$ n'implique pas forcément $(u_n) \nearrow$. Reprendre l'exemple précédent avec $u_0 = 9$. Tout dépend de u_0 et u_1.

IV <u>Suites bornées.</u>

Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée) s'il existe *m* tel que $m \leq u_n$ (respectivement $u_n \leq M$) pour tout entier naturel *n*. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque : on n'arrive pas forcément à trouver le minimum (le plus grand des minorants) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Idem pour le maximum, qui est le plus petit des majorants.

Méthodes :

- Étude fonctionnelle (pour les suites du type $u_n = f(n)$). On étudie la fonction *f* sur $\mathbb{R}^+$ (car *n* est un entier positif ou nul). La suite a les mêmes minorants ou majorants que *f*.

  Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 5n + 3$.

  On a étudié la fonction *f* définie $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 5x + 3$ ci-dessus.

  On a trouvé que, f croissante $\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$. En anticipant un peu sur les limites, on peut construire le tableau de variations de *f*.

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f'		-	0	+	
f	0	↘	$-\frac{13}{4}$	↗	$+\infty$

  Un minorant de (u_n) est $-\frac{13}{4}$. Ce n'est pas le plus grand des minorants, que l'on trouve en calculant $u_2 = -3$ et $u_3 = -3$. Le minimum de (u_n) est donc -3.

- Récurrence. Méthode évidente pour les suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Il y a comme ci-dessus les deux variantes, soit par le calcul direct, soit par l'étude de *f*.

  Exemple : soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$ et $u_0 = 0$. Montrons que $0 \leq u_n \leq 4$

  Initialisation : $u_0 = 0$, on a bien $0 \leq u_0 \leq 4$.

  Hérédité : Supposons que pour *n* donné, $0 \leq u_n \leq 4$

  $\Rightarrow 0 \leq 2u_n \leq 8$ on a multiplié par 2

  $\Rightarrow 6 \leq 2u_n + 6 \leq 14$ on a ajouté 6

  $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{2u_n + 6} \leq \sqrt{14} \leq 4$ on passe à la racine (fonction croissante)

  $\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$ vrai au rang $n + 1$

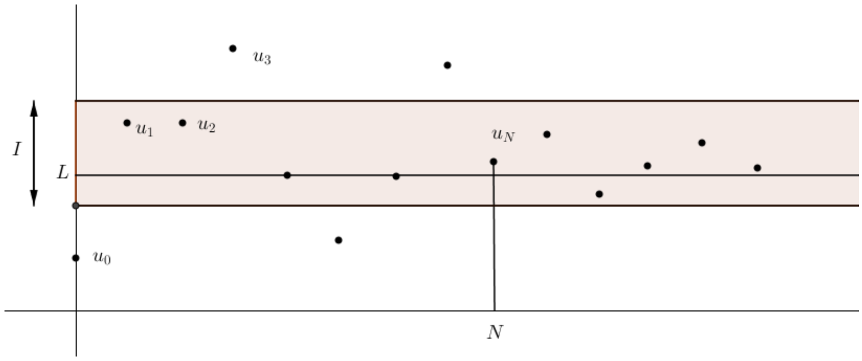
  Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré d'après l'axiome de récurrence que $0 \leq u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

V Limites des suites.

1/ Suites convergentes.

Définition : la suite (u_n) admet *L* pour limite quand *n* tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert *I* contenant *L* contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang *N*. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ (on lit « la limite de u_n en $+\infty$ est *L* »).

On dit que la suite (u_n) converge vers *L*.



L'idée est que l'intervalle I est aussi petit que l'on veut autour de L, on se rapproche donc de L.

Exemple : Limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

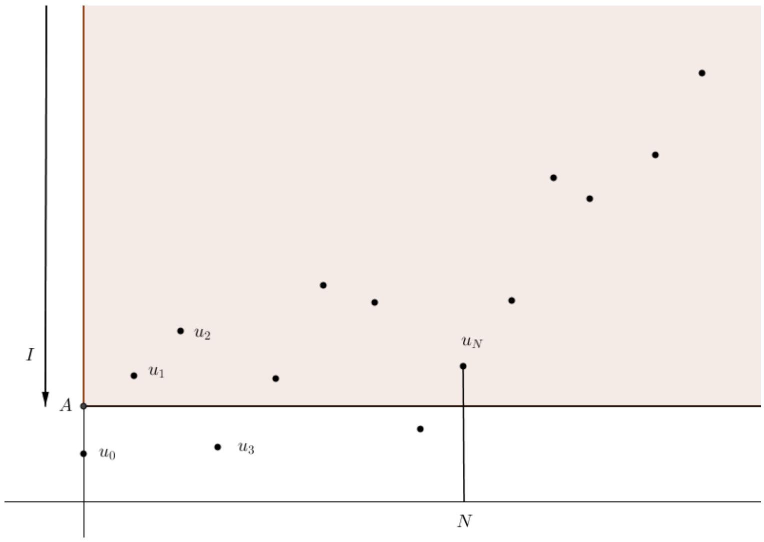
À partir d'une observation sur la calculatrice, on conjecture que la limite de la suite est 2.
Soit I un intervalle ouvert contenant 2. Soit J un intervalle centré contenu dans I. Si toutes les valeurs de u_n sont contenues dans J à partir d'un rang N, alors elles seront contenues dans I.
Posons $J = [2-\varepsilon ; 2+\varepsilon]$, où ε désigne un réel strictement positif (petit, c'est traditionnel en mathématiques).

- Il est clair que $u_n = 2 + \frac{1}{n} \geq 2 \geq 2 - \varepsilon$, car $\varepsilon > 0$.
- Par ailleurs $2 + \frac{1}{n} \leq 2 + \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Soit N le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$. Les deux points précédents montrent que pour tout intervalle ouvert I contenant 2(sous-entendu aussi petit que l'on veut), on peut trouver N tel que pour $n \geq N$, $u_n \in J \subset I$. C'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

2/ <u>Suites admettant +∞ pour limite.</u>

Définition : la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle du type $I = [A ; +\infty[$, avec A aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang N.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (on lit « la limite de u_n en $+\infty$ est $+\infty$ »).



Remarques :

- L'intervalle peut être ouvert ou semi fermé ; $I = [A ; +\infty[$ ou $I =]A ; +\infty[$ convient.
- on dit que la suite diverge vers +∞.
- On définit de même la divergence vers -∞.
- Une suite qui n'admet pas de limite diverge également.

Exemple : Limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$

À partir d'une observation sur la calculatrice, on conjecture que la limite de la suite est +∞..

Soit A un réel aussi grand que l'on veut, et $I = [A;+\infty[$.

Observons que $u_n = \sqrt{n^2+n+1} \geq \sqrt{n^2} = n$.

On en déduit que pour $n \geq A$, $u_n = \sqrt{n^2+n+1} \geq A$ (on n'a pas trouvé le plus petit nombre tel que $u_n \geq A$, ça n'a aucune importance car il y a bien tous les termes à partir d'un certain rang qui sont « grands »).

Soit N le plus petit entier supérieur ou égal à A. Pour $n \geq N$, $u_n \in [A;+\infty[$. C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3/ Limites des suites de référence.

$u_n = n$, $u_n = \sqrt{n}$, $u_n = n^2$, $u_n = n^p$ $(p \in \mathbb{N})$ tendent vers $+\infty$;

$u_n = \dfrac{1}{n}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $u_n = \dfrac{1}{n^p}$ $(p \in \mathbb{N})$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

VI Opérations sur les limites.

Compléter les tableaux intuitivement, au crayon à papier. Y-a-t-il des cas problématiques ?

1/ Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ là $\longrightarrow$ ici $\downarrow$	L'	$+\infty$	$-\infty$
L			
$+\infty$			
$-\infty$			

2/ Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ là $\longrightarrow$ ici $\downarrow$	L'	0	$\pm\infty$
L			
0			
$\pm\infty$			

3/ Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \Big/ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ là $\longrightarrow$ ici $\downarrow$	L'	0	$\pm\infty$
L			
0			
$\pm\infty$			

Remarque : on utilisera pour les exercices de ce chapitre une partie d'un théorème que l'on démontrera ultérieurement, à savoir :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 positif.

Si $q > 1$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$;

Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) converge vers 0 ;