RECURRENCE

« un voyage de mille lieues commence toujours pas un premier pas » - Lao Tseu

Formulé par Peano Guiseppe (1858 – 1932) : professeur à l'université de Turin.

Le raisonnement par récurrence est un axiome : non démontrable, il est admis.

Axiome de récurrence : si une propriété est vraie pour un entier donné n_0, et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour l'entier $n(\geq n_0)$ alors elle est vraie pour l'entier $n+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0.

Remarque :

On rédige la démonstration en trois parties.

- Initialisation : la propriété est vraie au rang n_0, en général 0 ou 1.
- Hérédité/transmission : on suppose que la propriété est vraie à un rang n donné (ceci s'appelle l'hypothèse de récurrence notée HR), on montre alors qu'elle est vrai au rang $n+1$.

  « la propriété est vraie à un rang n donné » s'appelle l'hypothèse de récurrence, notée HR.
- Conclusion : une phrase type « d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq \ldots$ »

Exemples :

- $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ est croissante