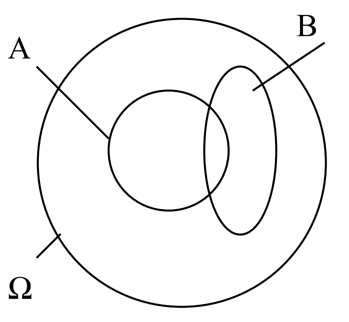
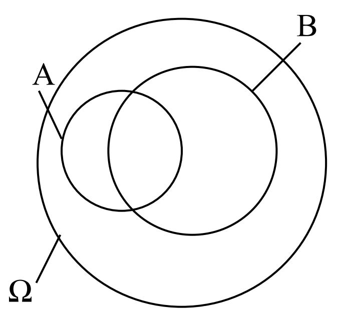
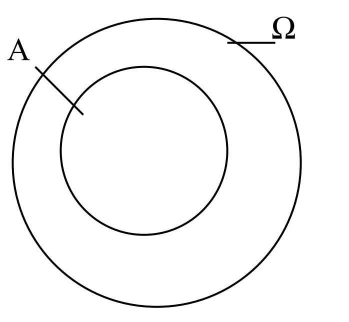
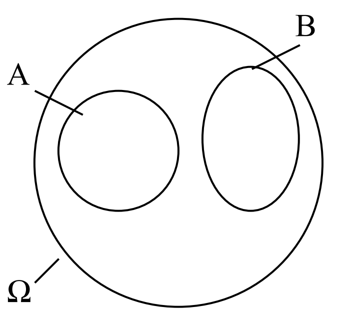
Probabilités

I. Rappels.

1. Parties d'un ensemble.

Réunion	Intersection	Complémentaire	Ensembles disjoints
			
$A \cup B$ « ou »	$A \cap B$ « et »	$\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$ « non »	$A \cap B = \varnothing$

Définition : les ensembles A_1, A_2, …,A_p constituent une partition de E sssi :

- Ils sont deux à deux disjoints ;
- Leur réunion est E ;
- Chaque A_i est non vide (pour des raisons de commodité).

Définition : le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note Card(E) ou $|E|$.

Schéma partition :

2. Vocabulaire des probabilités.

On considère une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'issues. L'univers Ω est l'ensemble de toutes les issues : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Remarque : dans un deuxième temps, on travaillera sur des univers infinis.

Définir une probabilité sur Ω, c'est associer à chacune de ces issues un nombre noté $P(\omega_i)$ tel que $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{i=n} P(\omega_i) = 1$.

Un événement A est une partie de Ω.

Un événement élémentaire est un événement constitué d'une seule issue.

Deux événements A et B sont incompatibles si les ensembles A et B sont disjoints, c'est à dire que $A \cap B = \varnothing$.

L'événement contraire de A est $\overline{A}$.

L'événement « A ou B » est la réunion des événements $A \cup B$.

L'événement « A et B » est l'intersection $A \cap B$.

L'événement impossible est $\varnothing$, l'événement certain est Ω.

3. Probabilité d'un événement.

Par définition, la probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

On a les propriétés suivantes :

- $0 \leq P(A) \leq 1$ $\quad P(\Omega) = 1$ $\quad P(\varnothing) = 0$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A et B sont incompatibles on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

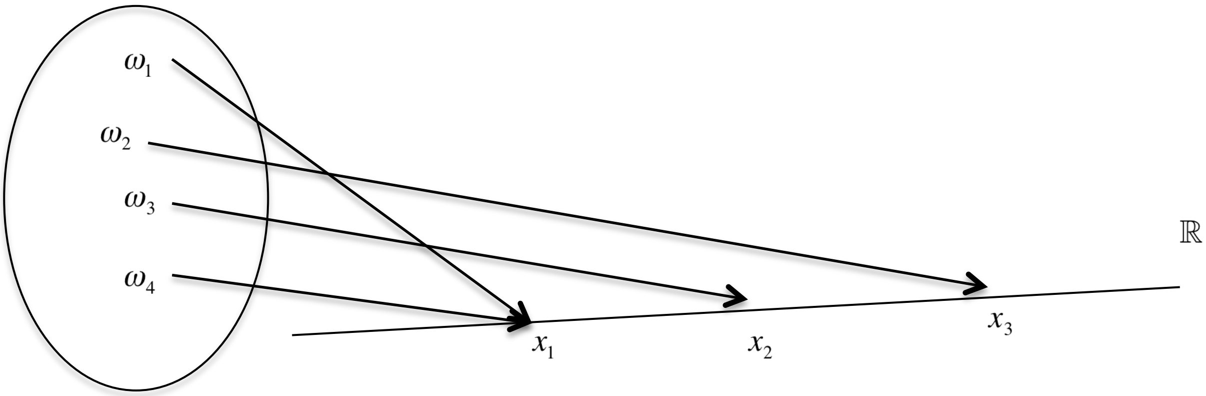
Une probabilité est dite équiprobable si tous les événements élémentaires ont la même probabilité. On a alors $P(\mathrm{A})=\dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\dfrac{\text{nombre des issues favorables à A}}{\text{nombre total d'issues}}$.

4. Variables aléatoires.

Définition : Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, sur lequel est définie une probabilité *P*. On appelle variable aléatoire *X* toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On note $(X=k)$ l'événement constitué des issues ω de Ω ayant *k* pour image par *X* ; c'est donc l'ensemble des antécédents de *k* par *X*.

Remarques : on associe donc à chaque ω_i un réel.

X est appelé variable alors que c'est une fonction.



Sur ce schéma, on a $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;\omega_4\}$, et l'image de Ω est l'ensemble des quatre réels $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3\}$. On est partis d'une expérience aléatoire sur l'univers Ω, pour arriver dans $\mathbb{R}$, grâce à la variable aléatoire *X* (qui est, rappelons-le, une fonction).

Définition/théorème : Soit P_X l'application qui à tout événement élémentaire x_i de $X(\Omega)$ (l'image de Ω par *X*) associe la somme des probabilités des ω_i antécédents de x_i. Alors P_X est une probabilité appelée probabilité image de *P* par *X*.

Pour tout événement A, la probabilité de A est donnée par $P_X(A)=P(\{\omega\in\Omega, X(\omega)\in A\})$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction $\begin{array}{l} X(\Omega)\to[0;1] \\ k\mapsto P(X=k)\end{array}$.

Exemple: sur le schéma précédent, on pose : $P(\omega_1)=p_1, P(\omega_2)=p_2, P(\omega_3)=p_3$ et $P(\omega_4)=p_4$

On a alors : $P_X(x_1)=p_1+p_4$, $P_X(x_2)=p_3$ et $P_X(x_3)=p_2$.

On résume ces résultats dans un tableau, qui donne la loi de probabilité de *X* :

$X=x_i$	x_1	x_2	x_3
$P(X=x_i)$	p_1+p_4	p_3	p_2

Définition : L'espérance E(*X*) ou $\overline{X}$ est donnée par $\mathrm{E}(X)=\overline{X}=\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$.

Remarque : l'espérance correspond à la moyenne en statistique, et pour un jeu d'argent on peut considérer qu'elle donne le gain moyen sur un grand nombre de parties.

Définition : La variance V(*X*) est donnée par : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^2\right)$. On lit la première formule « moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne », et la deuxième.

On peut écrire cette formule avec le symbole $\sum$ lorsque la probabilité est définie sur un ensemble fini (et dans certaines conditions sur $\mathbb{N}$). $\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(x_i-\mathrm{E}(X)\right)^2$.

Théorème de Köenig : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\left(\mathrm{E}(X)^2\right)=\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i{}^2-\left(\mathrm{E}(X)^2\right)$ (« moyenne des carrés moins carré de la moyenne »).

Démonstration :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^2\right)=\sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(x_i-\mathrm{E}(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(x_i^2-2x_i\cdot\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X)^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2-2\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i\right)\mathrm{E}(X)+\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)\mathrm{E}(X)^2 \qquad \to \text{on distribue puis on factorise}$$

$$=\mathrm{E}\left(X^2\right)-2\cdot\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X)^2=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}(X)^2 \text{ car } \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i=\mathrm{E}(X) \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} p_i=1 \qquad \blacksquare$$

Définition : L'écart-type σ est donné par : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Remarques : ce sont les mêmes formules que pour les statistiques. On utilise pour le calcul de la variance plutôt ma deuxième formule que la première (formule de Köenig).

L'écart-type représente la « dispersion » de la probabilité.

Exemples :

- Le ticket de « quatre pigeons », nouveau jeu de hasard, comporte trois cases à gratter. Il coûte un euro. Quand on fait apparaître un pigeon, on gagne deux euros, pour deux pigeons on gagne cent euros et pour trois pigeons on gagne cent mille euros. La société de jeux émet un million de tickets, dont cent mille avec un pigeon, mille avec deux pigeons, et deux avec trois pigeons. Ignace achète un ticket. On note X la variable aléatoire égale au gain correspondant.
  - Quelle est la loi de probabilité de X ?
  - 2°) Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il équitable ? (on ne demande pas qui est le quatrième pigeon).
- Une urne contient une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire une boule, on la remet, puis on tire une deuxième boule. Chaque boule rouge rapporte 6 €, chaque verte rapporte 1 €, par contre chaque bleue « coûte » 8 €. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la gain. Donner la loi de X ainsi que ses caractéristiques.

Propriété : L'espérance est linéaire. Soient X et y deux variables aléatoires définies sur le même univers et a un réel. Alors

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X)$
- Exemple : on lance un dé quatre fois de suite. Quelle est, en moyenne, la somme des points obtenus ?

II. Probabilités conditionnelles

1. Définition.

Soit Ω un univers , A et B deux événements tels que A ≠ Ø. La réalisation de l'événement A peut modifier celle de B.

Exemple : on tire deux cartes successivement et sans remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la deuxième soit un coeur sachant que la première en est un ? Quelle est la probabilité que la deuxième soit un cœur (ne sachant rien) ?

P(« 2$^{\text{ème}}$ cœur sachant 1$^{\text{ère}}$ cœur ») = P(« 2$^{\text{ème}}$ cœur ») =

Définition : Soit Ω un univers , A et B deux événements tels que A ≠ Ø.

La probabilité de B sachant que A est réalisé est $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$

Remarque : on utilise souvent la formule précédente pour obtenir la probabilité de l'événement « A et B » : $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$.

2. Règles de construction d'un arbre pondéré.

Règle 1 : les « feuilles » forment une partition de Ω.

Règle 2 : le poids d'une branche est égal à la probabilité conditionnelle de la « fin » sachant le « début ».

Règle 3 : la somme des probabilités « sortantes » d'un nœud vaut 1

Règle 4 : Le poids d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent.

Règle 5 : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est donnée par la somme des probabilités des chemins.

Exemple : Pour Noël, Thaïs a offert à Camille un sac de dragées surprises de Berthie Crochue (cf. Harry Potter, et les prénoms ont été modifiés pour respecter l'anonymat des participants). Dans le sac, il y a cinq dragées goût chocolat et une goût morve. Camille les mange une par une, au hasard. Si elle tombe sur la dragée goût morve, elle jette tout le sac. Quelle est la probabilité que Camille mange au moins 3 dragées ?

3. *Probabilités totales.*

Théorème : soit $A_1, A_2, \ldots, A_p$ une partition de Ω. Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$
$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n)$$

4. *Indépendance.*

Définition : Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque : ceci équivaut à $P(B|A) = P(B)$, la réalisation de A n'a aucune influence sur celle de B.

Théorème : si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

Démonstration :

On calcule $P(\overline{A} \cap B) = P_B(\overline{A})P(B) \overset{(1)}{=} (1 - P_B(A))P(B)$ (1) car l'événement contraire de $B|\overline{A}$ est $B|A$, faire un arbre si vous n'êtes pas convaincu.

Comme A et B sont indépendants, on a $P_B(A) = P(A)$

En substituant dans (1), on obtient $P(\overline{A} \cap B) = (1 - P(A))P(B) = P(\overline{A})P(B)$ CQFD

III. La loi binomiale

1. *La loi de Bernoulli.*

Définition : une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire ayant deux issues contraires, en général appelées Succès et Échec, de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.

Exemples : tirage d'une pièce de monnaie, p(Pile) = 1/2 et p(Face) = 1/2.

Choix d'un élève au hasard dans la classe de TS4. On décidera si succès est garçon ou fille, je ne prendrai pas de responsabilité sur ce sujet ☺.

P(S) = / et p(E) = /

Définition : Soit une épreuve de Bernoulli d'issues S et E. Soit X la variable aléatoire définie comme suit :

- $X = 1$ si l'issue de l'épreuve est S (probabilité p)
- $X = 0$ si l'issue de l'épreuve est E (probabilité q)

La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

$X = x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$q = 1 - p$	p

Théorème : L'espérance de X vaut $E(X) = p$ et la variance de X vaut $V(X) = pq$.

Remarque : la démonstration est immédiate, à faire ci-dessous

2. *La loi binomiale.*

a. *Définition.*

Définition : un schéma de Bernoulli est la *répétition* de n épreuves de Bernoulli *identiques et indépendantes* d'issues contraires S (de probabilité p) et E (de probabilité $q = 1 - p$).

La variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ mesurant le nombre de succès suit par définition la loi binomiale de paramètres n et p.

On note la loi binomiale de paramètres n et p $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple : tirage de 5 pièces de monnaies, on compte le nombre de « pile ». On peut considérer que l'on lance les pièces successivement ou en même temps, dès lors que les lancés sont indépendants.

b. Caractéristiques.

Théorème : La probabilité de ($X = k$) est donnée par $p(X=k)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$.

L'espérance et la variance de X sont $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Remarques : démonstrations, cf. votre cours de première.

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le coefficient binomial « k parmi n ». Il vaut $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

On note aussi C_n^k.

Exemple : un QCM comporte dix questions offrant chacune 3 réponses possibles. On répond complètement au hasard. Quelle est la probabilité

(i) D'avoir 2 réponses exactes ?

La variable aléatoire X « nombre de réponses justes au QCM en répondant au hasard » suit la loi binomiale $\mathscr{B}($; $)$. D'où

(ii) D'avoir la moyenne ? (5 réponses justes au moins).

On calcule