La fonction logarithme népérien

1. <u>Définition</u>

   Définition : La fonction logarithme népérien est l'unique fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, notée $x \mapsto \ln x$, telle que $\ln 1 = 0$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

   Démonstration : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$. D'après le cours sur les intégrales, elle y admet des primitives *F*, dont une seule vérifie la condition initiale $F(1) = 0$. Ceci équivaut à dire que la fonction logarithme népérien est égale à $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. <u>Propriétés algébriques</u>

   Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs, et pour tout entier naturel *n*, on a :

   $\ln ab = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln \frac{1}{a} = -\ln a$ $\qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ $\qquad \ln a^n = n \ln a$ $\qquad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

   Démonstrations :

   - $\ln ab = \ln a + \ln b$ a été démontré dans le TD d'introduction. On remarque que dans le TD d'introduction on est parti de l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour définir la fonction logarithme népérien, c'est donc une autre possibilité de définition de la fonction $x \mapsto \ln x$.
   - $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ln \frac{1}{a} + \ln a = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{a} = -\ln a$

     Pour (1), on a utilisé $\ln ab = \ln a + \ln b$
   - $\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \overset{(1)}{=} \ln a + \ln \frac{1}{b} \overset{(2)}{=} \ln a - \ln b$

     Pour (1), on a utilisé $\ln ab = \ln a + \ln b$

     Pour (2), on a utilisé $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$
   - comme souvent, on va faire une récurrence pour montrer que $\ln a^n = n \ln a$
     - Initialisation : pour $n = 0$, on a $\ln a^0 = \ln 1 = 0$ et $0 \times \ln a = 0$. La propriété est vraie.
     - Hérédité : Supposons que pour *n* fixé, $\ln a^n = n \ln a$.

       Calculons $\ln a^{n+1} = \ln\left(a^n \times a\right)$

       $\Rightarrow \ln a^{n+1} = \ln a^n + \ln a$ car $\ln ab = \ln a + \ln b$

       $\Rightarrow \ln a^{n+1} = n \ln a + \ln a$ d'après l'hypothèse de récurrence

       $\Rightarrow \ln a^{n+1} = (n+1) \ln a$

       La propriété est vraie au rang $n+1$
     - Conclusion : on a montré d'après l'axiome de récurrence que $\ln a^n = n \ln a$ pour tout entier naturel *n* et pour tout réel *a* strictement positif.
   - $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ln a = 2 \ln \sqrt{a} \Leftrightarrow \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

     Pour (1), on a utilisé $\ln a^n = n \ln a$

3. Étude

a. Sens de variation et dérivée

La fonction logarithme népérien admettant $x \mapsto \frac{1}{x}$ comme dérivée, elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. C'est donc une bijection, de l'intervalle $]0;+\infty[$, vers un intervalle à déterminer.

Rappel : une bijection est une fonction *f*, définie sur un intervalle *I*, à valeurs dans un intervalle *J*, pour laquelle tout nombre *y* de l'intervalle image *J* admet un seul antécédent par *f* dans l'intervalle *I*. C'est à dire que pour tout nombre *y* de *J*, l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique dans *I*.

b. Fonction réciproque

On admet :

- Qu'une bijection $\begin{array}{l} f:I\to J \\ x\mapsto f(x)=y \end{array}$ admet une fonction réciproque $\begin{array}{l} f^{-1}:J\to I \\ y\mapsto f^{-1}(y)=x \end{array}$ (la réciproque « part » de *y* pour « arriver » à *x*) ;
- Que la réciproque d'une fonction dérivable est dérivable (il y a des petites nuances à apporter…, voir par exemple la fonction carré sur $[0;+\infty[$, et sa réciproque la racine carrée, qui n'est pas dérivable en 0) ;
- La formule $\left(u\left(v(x)\right)\right)' = v'(x)\times u'\left(v(x)\right)$, plus simplement écrite : $\left(u(v)\right)' = v'\times u'(v)$

Soit *f* la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, elle vérifie :

$\ln\left(f(x)\right)=x$; en effet *f* et la fonction logarithme népérien « font l'inverse » l'une de l'autre.

En dérivant, on obtient :

$f'(x)\times\frac{1}{f(x)}=1$ on a appliqué $\left(u(v)\right)'=v'\times u'(v)$, où $u(X)=\ln X$

$u'(X)=\frac{1}{X}$

et $v(x)=f(x)$

soit : $f'(x)=f(x)$

Les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^x$, où k est un réel quelconque, vérifient cette relation (faites cette vérification).

Réciproquement, soit *f* une fonction vérifiant $f'=f$.

Dérivons la fonction $x\mapsto f(x)\times\mathrm{e}^{-x}$.

$\left(f(x)\times\mathrm{e}^{-x}\right)' = f'(x)\times\mathrm{e}^{-x}-f(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x)\times\mathrm{e}^{-x}-f(x)\mathrm{e}^{-x}=0$ (on utilise $f'=f$)

On en déduit que $f(x)\times\mathrm{e}^{-x}=k \Leftrightarrow f(x)=k\mathrm{e}^{-x}$

On a montré que les seules fonctions vérifiant $f'=f$, sont les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^x$, où $k\in\mathbb{R}$.

La fonction réciproque du logarithme népérien est donc de ce type.

Elle vérifie de plus $f(0)=1$, car $\ln 1=0$ (on échange les *x* et les *y*).

D'où $k\mathrm{e}^0=1\Leftrightarrow k=1$, on a montré le :

Théorème : la fonction réciproque du logarithme népérien est l'exponentielle naturelle.

Conséquences :

$\forall x\in\mathbb{R},\quad \ln\mathrm{e}^x=x$ et $\forall y\in\mathbb{R}_*^+,\quad \mathrm{e}^{\ln y}=y$

$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^x=y\Leftrightarrow x=\ln y$ et $\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\quad \ln x=y\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^y$

$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^x<y\Leftrightarrow x<\ln y$ et $\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\quad \ln x<y\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}^y$ (fonctions croissantes)

$\ln\mathrm{e}=1$ puisqu'on a en fait écrit $\ln\mathrm{e}^1=1$

Remarque : ceci prouve l'existence de la fonction exponentielle d'une autre manière que celle vue en DM.

c. Limites

Théorème : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Démonstration : on utilise le fait que la réciproque du logarithme népérien soit la fonction exponentielle, et on « réciproquise » les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$.

d. Tableau de variation

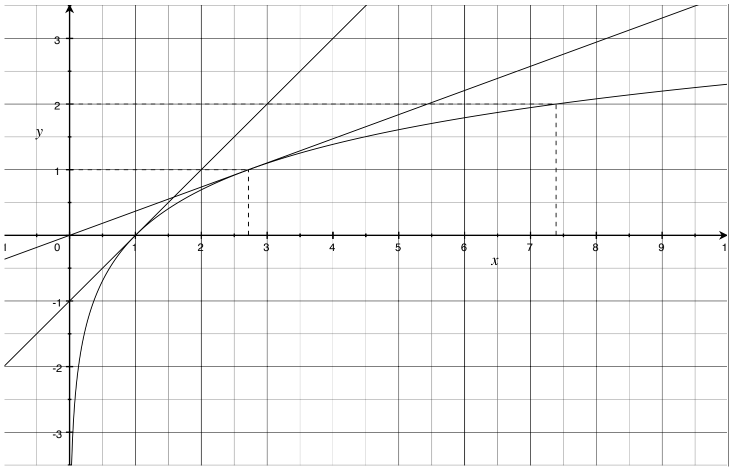
x	0	$+\infty$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$
$x \mapsto \ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

e. Courbe représentative

Ci-contre

Equation des tangentes (à vérifier) :

- Au point d'abscisse 1 $y = x - 1$
- Au point d'abscisse e $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} x$



f. Approximation affine en 1

Théorème : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

C'est à dire : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

Démonstration :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

On a utilisé la définition du nombre dérivé $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$; et le 4° ci-dessous pour le calcul de la dérivée : $\left(\ln(1+x)\right)' = \dfrac{(1+x)'}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$

4. Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$

Théorème : Soit u une fonction strictement positive sur son ensemble de définition I. On admet que la dérivée de la fonction définie sur I par $x \mapsto \ln(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On retient $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

5. Croissances comparées

Théorème : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

Démonstrations :

- On peut partir des croissances comparées avec l'exponentielle, et passer à la réciproque :

On pose $y = \ln x$ dans $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$, on obtient alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Faites de même avec $\lim\limits_{y \to -\infty} ye^y = 0$.

- On peut aussi étudier la fonction $f : x \mapsto x - \ln x$ sur $]0;+\infty[$.

  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, positif pour $x > 1$ et négatif pour $0 < x < 1$.

  f est décroissante sur $]0;1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$. Son minimum est atteint en 1 et vaut $f(1) = 1$.

  On en déduit que $f(x) \geq 0 \Rightarrow \ln x \leq x$.

  Posons $x = \sqrt{X}$, on obtient alors $\ln\sqrt{X} \leq \sqrt{X} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\ln X}{X} \leq \frac{1}{\sqrt{X}}$ en divisant par *X*.

  Par ailleurs en +∞, X et $\ln X$ sont positifs.

  L'inégalité précédente peut être complétée en $0 \leq \frac{\ln X}{X} \leq \frac{1}{2\sqrt{X}}$.

  On applique le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{X}} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

6. Logarithme décimal

Définition : le logarithme décimal est la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Cette fonction est utilisée principalement en physique et en sciences et vie de la terre pour son côté pratique. En effet, elle vérifie en particulier la propriété $\log 10^x = x$.