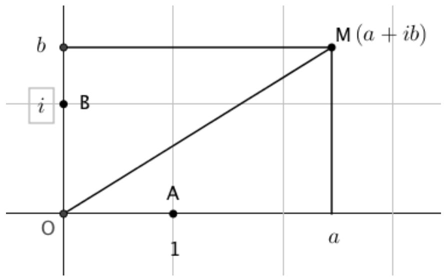
Nombres complexes.

I Forme algébrique

1. Les points du plan et les nombres complexes.



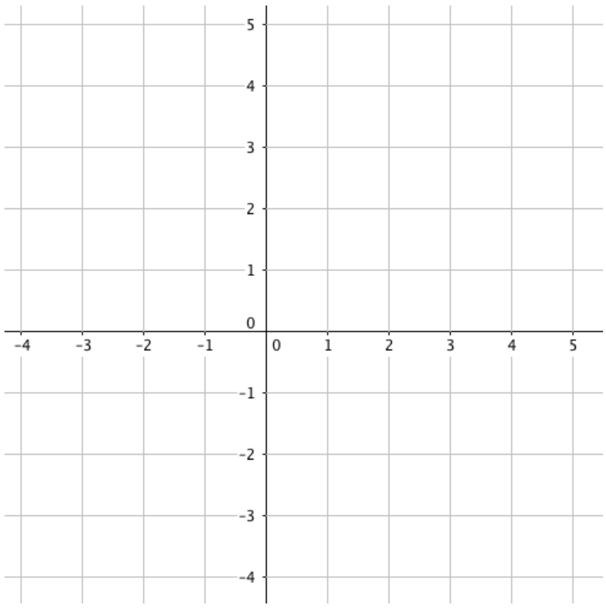
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.
Au point A(1 ; 0) on associe le nombre 1, au point B(0 ; 1) on associe le nombre i tel que $i^2=-1$.
À tout point M(a ; b) on associe son affixe $z=a+ib$. Réciproquement M est l'image de z.
Remarque : i est un nombre comme les autres… Il faudra s'habituer à le considérer comme $\sqrt{2}$ ou π.

Théorème : Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels quelconque, et i vérifie $i^2=-1$.
Alors :
- $\mathbb{C}$ existe, et i aussi. Les nombres de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes
- L'écriture $z=a+ib$ est unique. Elle est appelée forme algébrique de z.
- On peut munir $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$.

Conséquence : deux complexes $z=a+ib$ et $z=a'+ib'$ sont égaux si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$.

Exercice : dans le repère ci-contre, placer les points d'affixe donnés :

$\mathrm{M}(3+2i)$ $\mathrm{N}(-2+i)$
$\mathrm{P}(-4i)$ $\mathrm{Q}(5)$
$\mathrm{R}(4-3i)$ $\mathrm{S}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$



Définition : Soit z un nombre complexe, donné sous la forme $z=a+ib$. On appelle a la partie réelle de z, b la partie imaginaire de z. On note $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$.
Remarque : dans la partie imaginaire, il n'y a pas le « i ». La partie imaginaire de z est donc un nombre réel !

Remarques/définitions complémentaires :
- On note souvent $z=x+iy$, pour rappeler l'usage des coordonnées. Il n'y a pas de préférence pour une notation ou l'autre.
- Un complexe $z=a+ib$ est réel si et seulement si $b=0$; c'est à dire que $z=a$.
- Un complexe $z=a+ib$ est imaginaire pur si et seulement si $a=0$; c'est à dire que $z=ib$.
- L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{u}$ est l'affixe du point M.

Que changent les complexes par rapport aux réels ?
- On gagne le fait qu'une équation de degré n ait toujours n solutions (certaines pouvant être présentes plusieurs fois). Plus précisément, on dit qu'un polynôme de degré n a toujours n

racines dans $\mathbb{C}$. La démonstration dépasse amplement le niveau de terminale, on se contentera du second degré.

- On perd l'ordre. Pour rappel, deux nombres réels peuvent toujours être ordonnés (il y a le plus grand et le plus petit). Pour montrer que l'ordre dans $\mathbb{C}$ n'existe pas, il suffit de trouver deux éléments non ordonnables. On va montrer que le nombre *i*, qui n'est pas nul, n'est ni positif ni négatif, c'est à dire qu'on n'a pas $i > 0$ ou $i < 0$.
  Démonstration par l'absurde :
  Pour démontrer une propriété par l'absurde, on suppose que son contraire est vrai, et on montre qu'on arrive à une contradiction. On suppose donc qu'on a $i > 0$ ou $i < 0$.
  - Supposons que $i > 0$
    Alors $i > 0 \Rightarrow i^2 > 0^2 \Rightarrow -1 > 0$ car $i^2 = -1$
    Or -1 > 0 est problématique…donc *i* n'est pas positif
  - Puisque *i* n'est pas positif, alors $i < 0$ d'après notre hypothèse.
    Alors $i < 0 \Rightarrow i^2 > 0^2 \Rightarrow -1 > 0$ (on inverse l'ordre pour le passage au carré des négatifs).
    Absurde.
  - L'hypothèse « $i > 0$ ou $i < 0$ » emmène donc à une contradiction, on en déduit que *i* et 0 ne sont pas ordonnables.

2. Opérations

a/ *Point de vue algébrique*

→ regarder le film « Dimensions chapitre 5 » à l'adresse suivante : https://www.youtube.com/watch?v=BosTQT4smJA (ou googler dimension chapitre 5 français). Vous pouvez sauter le début et commencer à 1mn30. Finir à 9mn39 (pour ce qui concerne ce paragraphe), ou bien à 11mn45 (paragraphe « forme trigonométrique » ci-après. La suite, qui ne concerne pas le programme de terminale, est très surprenante, elle est plus facile à comprendre si vous suivez le documentaire dans l'ordre (en commençant par le chapitre 1… ☺).
Même si le rythme vous paraît lent, le raisonnement exposé est fin.

- *Notamment bien comprendre pourquoi, avec un raisonnement géométrique et non calculatoire, le narrateur dit « il n'y a donc aucun nombre qui, multiplié par lui-même, donne -1 » (3 mn 59).*
- *Point important à 7mn17 (multiplication par i)*

Toutes les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ sont valables dans $\mathbb{C}$.
En particulier : somme et produit, identités remarquables, règle du produit nul.

Exemple : disposition rapide du calcul pour le produit
Pour limiter les erreurs de calcul pendant la distribution lors d'une multiplication, il est plus efficace de changer ses habitudes comme suit :

$$(3+2i)(-5+4i) = \underbrace{\overbrace{3\times -5 + 2i\times 4i}^{\text{flèches}}}_{\text{partie réelle}} + i\underbrace{\overbrace{\left(3\times 4 + 2\times -5\right)}^{\text{flèches}}}_{\text{partie imaginaire}} = -23+2i$$

On a d'abord calculé tout ce qui donne un résultat réel (flèches rouges du dessus). On peut même dans un second temps ne plus du tout écrire les « *i* », sachant qu'on a un $i^2 = -1$. Puis on met un « *i* » en facteur, et on calcule la partie imaginaire (flèches bleues du dessous).

Inverse : Pour $z \neq 0$ on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ (ne pas retenir, on verra plus loin une forme plus compacte)

Exemple : calcul d'un inverse sous forme algébrique.

$$\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{3+4i}{3^2+4^2}=\frac{3+4i}{25}$$

Dans le calcul précédent, constater que :

- Pour supprimer les « i » au dénominateur, on a multiplié par une fraction égale à 1, où dénominateur et numérateur sont deux complexes égaux. Ce complexe a la même partie réelle que le dénominateur d'origine, pour la partie imaginaire le signe est inversé. Ce nombre est appelé conjugué (cf. ci-dessous)
- On a appliqué l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Ici on a $(3-4i)(3+4i)=3^2-(4i)^2=3^2-4^2i^2=3^2+4^2$ car $i^2=-1$.
- On peut retenir une nouvelle identité remarquable $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$
- On obtient bien la forme algébrique du nombre : $\frac{1}{3-4i}=\frac{3+4i}{25}=\frac{3}{25}+i\frac{4}{25}=a+ib$

À faire en suivant la même méthode : $\frac{1-i}{1+i}=$

Remarque pour la culture mathématique :

- l'addition dans $\mathbb{C}$ est commutative $z+z'=z'+z$, associative $z+(z'+z'')=(z+z')+z''$, admet un élément neutre 0 $z+0=0+z=z$, et tout élément admet un opposé : on dit que $(\mathbb{C},+)$ est un groupe commutatif.
- De même, la multiplication dans $\mathbb{C}_*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ est commutative, associative, admet un élément neutre 1, et tout élément admet un opposé (appelé inverse dans le cas du produit) : on dit que $(\mathbb{C}_*,\times)$ est un groupe commutatif. Remarquez que la division n'est pas associative.
- De plus le produit est distributif par rapport à l'addition : $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

b/ *Interprétation géométrique*

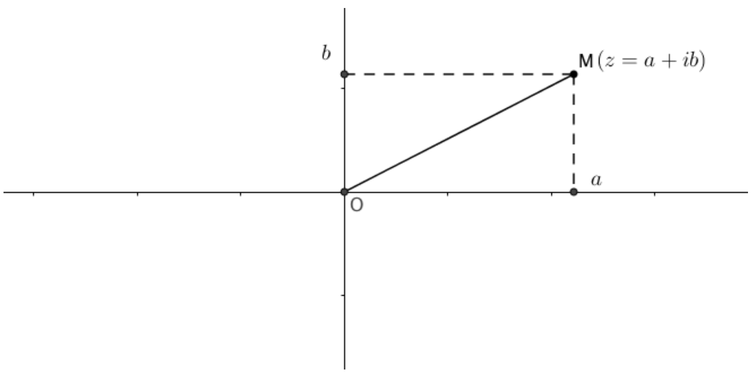
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$, et A, B et I trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. On a alors :

- L'affixe du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$: $z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ $\left(=z_{\overrightarrow{AO}}+z_{\overrightarrow{OB}}\right)$
- L'affixe de I milieu de [AB] : $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

3. Conjugué d'un nombre complexe.

Définition : le conjugué du complexe $z=a+ib$ est le complexe $\bar{z}=a-ib$.

Symétries : Compléter le schéma ci-dessous, avec les points $M_1(\bar{z})$, $M_2(-z)$ et $M_3(-\bar{z})$.



Propriétés : la conjugaison est compatible avec les opérations usuelles (on dit que c'est un morphisme de corps…). Pour tous complexes z et z', et pour tout entier naturel n on a :

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$ $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$ $\overline{-z}=-\overline{z}$

Idempotence : $\overline{\overline{z}}=z$

Démonstrations :

- *Évident (mais à vérifier quand même) pour l'idempotence*

À faire avec la forme algébrique pour :

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{-z}=-\overline{z}$
- $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$
- Démontrons $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}\overset{(1)}{=}\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}\overset{(2)}{=}\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

  On a utilisé pour (1) : $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$ et pour (2) : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$; le principe étant d'utiliser au maximum les preuves précédentes, pour faire un minimum de calculs.
- Démontrons par récurrence que $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
  - Initialisation : pour $n=0$ on a $\overline{z^0}=\overline{1^0}=\overline{1}=1=\left(\overline{z}\right)^0$
  - Hérédité : supposons que pour un entier naturel n fixé, on a $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
  - (hypothèse de récurrence). Montrons alors que $\overline{z^{n+1}}=\overline{z}^{n+1}$.

    $$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}}&=\overline{z^n\times z}\\&=\overline{z^n}\times\overline{z}\quad \text{d'après}\quad \overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}\\&=\overline{z}^n\times\overline{z}\quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\quad \overline{z^n}=\overline{z}^n\\&=\overline{z}^{n+1}\quad \mathit{CQFD}\end{aligned}$$

    La propriété est vraie au rang $n+1$
  - Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré d'après l'axiome de récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \overline{z^n}=\overline{z}^n$

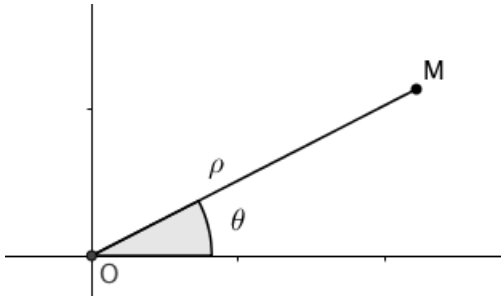
Méthodes / propriétés :

- z réel $\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow z=\overline{z}$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow z=-\overline{z}$

Démonstration (à faire proprement pour l'une des deux, plus rapidement pour l'autre) :

II Forme trigonométrique

Si vous ne l'avez pas encore fait, regardez Dimensions 5 de 9mn39 à 11mn45.



1. Module et argument

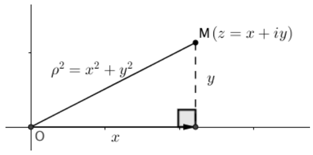
Plutôt que de repérer un point M dans le plan avec les deux coordonnées x et y, on peut utiliser la distance OM notée r ou ρ, et une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$, notée θ, (qui n'existe que pour M $\neq$ O).

Définition : soit $z \neq 0$ un complexe, M le point d'affixe z.

La longueur $OM = r = \rho$ est appelée module de z, et est notée $|z|$. D'où : $|z| = r = \rho$

Une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \theta$ est appelée *un* argument de z, noté $\arg z$ (on rappelle qu'un angle admet une infinité de mesures).

On écrit $\arg z = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ (se lit « un argument de z est congru à θ modulo 2π »)



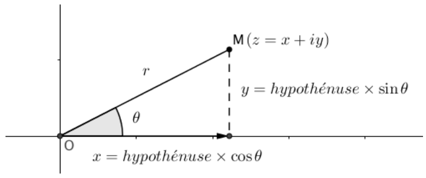
Liens entre forme algébrique et forme trigonométrique :

Pour tout nombre complexe z non nul on a :

$$r = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ \ ;\ \cos\theta = \frac{x}{r}\ ;\ \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

D'où : $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

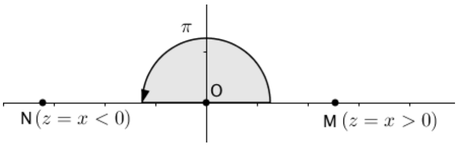


Propriétés immédiates :

- $|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z}$
- Si $z = x \in \mathbb{R}$, alors la notation est cohérente : module de $z = |z| = |x| =$ valeur absolue de x

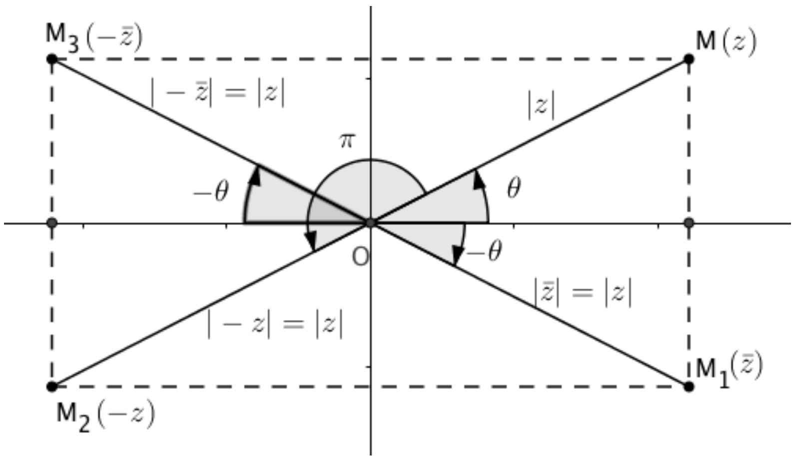
  De plus si $x > 0$ $\arg x = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  Si $x < 0$ $\arg x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg \overline{z} \equiv -\arg z[2\pi]$
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$

Le schéma suivant est important, il résume les propriétés précédentes ; il permet aussi de voir ce qui se passe pour $-\overline{z}$.



- On peut retenir la formule suivante pour le calcul de l'inverse d'un complexe, mais ce n'est pas obligatoire : $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}\left(=\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)$

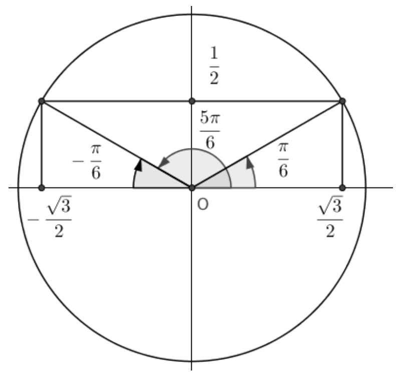
2. Forme trigonométrique

Définition : pour $z \neq 0$, l'écriture $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique de *z*, où $r=|z|$ et θ est un argument de *z*.

Rappel : vous connaissez bien sûr par cœur les lignes trigonométriques usuelles (et ce depuis la seconde ☺)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Vous vous rappelez également comment trouver, à partir d'un schéma, du tableau ci-dessus, et des propriétés de symétries, les lignes trigonométriques de, par exemple, $\frac{5\pi}{6}$. On trouve ici $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.



Exemples : donner la forme trigonométrique de :

2

-5

2*i*

-*i*

1 + *i*

-1 + *i*

2 + *i*

3. Opérations

Lemme : la démonstration est à comprendre, c'est une ROC. Par contre, le résultat est présenté de manière plus simple dans le théorème principal.

Soient *z* et *z'* deux complexes non nuls, avec $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$$zz'=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$$

$$\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')\right)$$

Démonstrations :

- $zz'=r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

  $=rr'\left[\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\cos\theta\sin\theta'+\cos\theta'\sin\theta)\right]$ on distribue comme vu en I-2-a (opérations : point de vue algébrique), en calculant d'abord la partie réelle, où l'on tient compte de $i^2=-1$. Puis on met « *i* » en facteur et on calcule la partie imaginaire.

  On utilise ensuite les formules sur le cosinus et le sinus d'une somme :

  $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$.

On obtient bien : $zz' = rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin\left(\theta+\theta'\right)\right)$

Remarque : on peut retenir les formules trigonométriques sous cette forme :

C+ = CC – SS et S+ = SC + CS

Ce qui permet de trouver C– = CC + SS et S– = SC – CS car $\cos(-a)=\cos a$ et $\sin(-a)=\sin a$.

- Pour le quotient, avec $\frac{1}{z'}=\frac{\overline{z'}}{|z'|^2}=\frac{r'\left(\cos(-\theta')+i\sin(-\theta')\right)}{r'^2}=\frac{1}{r'}\left(\cos(-\theta')+i\sin(-\theta')\right)$ (1) et $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$, on peut appliquer la formule que l'on vient de démontrer sur le produit, en remplaçant r' par $\frac{1}{r'}$ et θ' par $-\theta'$. On en déduit immédiatement $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')\right)$.
- Remarque : pour trouver l'écriture (1) de $\frac{1}{z'}$, on peut utiliser une méthode un peu plus « abstraite » :

  On pose $\theta=-\theta'$ et $r=\frac{1}{r'}$, d'où $zz'=\frac{1}{r'}r'\left(\cos(-\theta'+\theta')+i\sin(-\theta'+\theta')\right)=1(\cos 0+i\sin 0)=1$, donc $\frac{1}{z'}=z=\frac{1}{r'}\left(\cos(-\theta')+i\sin(-\theta')\right)$. On finit alors la preuve comme ci-dessus.

Corollaire : Soient *z* et *z'* deux complexes non nuls.

Module	Argument
$\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	$\arg zz'\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]$
$\left\lvert\frac{1}{z'}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\frac{1}{z'}\equiv-\arg z'[2\pi]$
$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\frac{z}{z'}\equiv\arg z-\arg z'[2\pi]$
$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$	$\arg z^n\equiv n\times\arg z[2\pi]$

Démonstrations :

- $|zz'|=|z||z'|$ et $\arg zz'\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]$ sont la traduction directe de $zz'=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\frac{z}{z'}\equiv\arg z-\arg z'[2\pi]$ sont la traduction directe de $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')\right)$.
- $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$ et $\arg\frac{1}{z'}\equiv-\arg z'[2\pi]$ sont obtenues à partir des propriétés sur le quotient, en posant dans la ligne précédente $z=1$ (d'où $|z|=1$ et $\arg z=0[2\pi]$)
- $|z^n|=|z|^n$ et $\arg z^n\equiv n\times\arg z[2\pi]$ se démontrent par récurrence à partir de la première propriété. Faites au moins une de ces démonstrations proprement, vous pouvez vous baser sur la preuve des puissances du conjugué.

A retenir :

- le module est compatible avec le produit, le quotient et les puissances.
- L'argument transforme le produit en somme, le quotient en différence, la puissance en produit.

Méthodes : z réel $\Leftrightarrow \arg z = 0[\pi]$

z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}[\pi]$

III Applications.

1. Équation du second degré à coefficients réels

Théorème : l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des réels quelconques ($a \neq 0$), admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$ (éventuellement deux fois la même).
Si $\Delta \geq 0$, les solution sont données par le théorème de première.

Si $\Delta < 0$, les solutions sont les deux nombres complexes conjugués : $z_{1-2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration rapide : il suffit de reprendre la démonstration de 1ère.

On trouve la forme canonique : $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Si $\Delta = b^2-4ac \geq 0$, on factorise comme en première et on obtient les solutions réelles.

Si $\Delta = b^2-4ac < 0$, alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$ (remarquez que $-\Delta > 0$). On factorise de manière semblable au cas $\Delta \geq 0$, d'où $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ CQFD.

2. Géométrie

a/ Utilisation du module : problèmes de longueurs

La propriété fondamentale est $\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|$

Exemples :

- Le cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M(z) tels que $\Omega\mathrm{M} = R \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = R$
- La médiatrice du segment [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et de B, soit $\mathrm{AM} = \mathrm{BM} \Leftrightarrow |z - z_\mathrm{A}| = |z - z_\mathrm{B}|$
- triangles divers, par exemple le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} \Leftrightarrow |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}| = |z_\mathrm{A} - z_\mathrm{C}|$

- parallélogrammes divers...

b/ Utilisation de l'argument : problèmes d'angles

Propriétés fondamentales : $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \equiv \arg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})[2\pi]$

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right)[2\pi]$, à savoir démontrer à partir de la précédente.

Exemples :

- (AB) perpendiculaire à (AC) $\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a}$ imaginaire pur
- A, B, C alignés $\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a}$ réel
- A comprendre ultérieurement : on peut mélanger utilisation du module et de l'argument :
  ABC est équilatéral si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\Leftrightarrow |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| \text{ et } \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}|}{|z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$