FORME EXPONENTIELLE DES NOMBRES COMPLEXES.

Introduction (pseudo ROC) : on a vu en TD que la fonction $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ \theta\mapsto\cos\theta+i\sin\theta \end{matrix}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

- $f(\theta+\theta')=f(\theta)\cdot f(\theta')$,
- $f'(\theta)=i\cdot f(\theta)$,

Ces propriétés rappellent celles de l'exponentielle : $\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$ et $\left(\exp(ax)\right)'=a\cdot\exp(a)$.

D'où la *Définition :*

- pour tout réel θ, on pose $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
- la forme exponentielle d'un nombre complexe est $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$, où r est le module de z, et θ est un argument de z.

Remarques/propriétés :

- La forme exponentielle n'est qu'une écriture plus compacte de la forme trigonométrique :
$$r\mathrm{e}^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
- $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|=1$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\equiv\theta[2\pi]$
- La notation est cohérente avec les propriétés de l'exponentielle, en effet les propriétés du cours sur les arguments donnent :
  $\mathrm{e}^{i\theta}\cdot\mathrm{e}^{i\theta'}=\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$ *provient de* $\arg zz'\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]$
  $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}}=\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$ *provient de*
  $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{in\theta}$ *provient de*
- $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{-i\theta}$ *provient de*

Théorème :

Formule de Moivre $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

Formules d'Euler $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$

Démonstrations assez immédiates :

- $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ *provient de*
- En utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus, détailler le calcul de :
  $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}=$
  $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}=$

Exemple : $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{2017}=\mathrm{e}^{2017\frac{\pi}{4}i}=\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{4}+252\times2\pi\right)i}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Applications :

- $\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}=\mathrm{e}^{i\theta}\cdot\mathrm{e}^{i\theta'}$ permet de retrouver $\begin{matrix}\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cdot\cos\theta'-\sin\theta\cdot\sin\theta' \\ \sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cdot\cos\theta'+\cos\theta\cdot\sin\theta'\end{matrix}$
- $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2=\mathrm{e}^{i2\theta}$ permet de retrouver $\begin{matrix}\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta \\ \sin(2\theta)=2\sin\theta\cdot\cos\theta\end{matrix}$

Ces calculs sont éventuellement à faire, pour comprendre la méthode (identification des parties réelles et imaginaires). Remarquez que ce n'est pas une preuve, puisqu'on a besoin des formules trigonométriques pour démontrer les propriétés sur les arguments, et non l'inverse.