Diviser pour Régner

Principe :

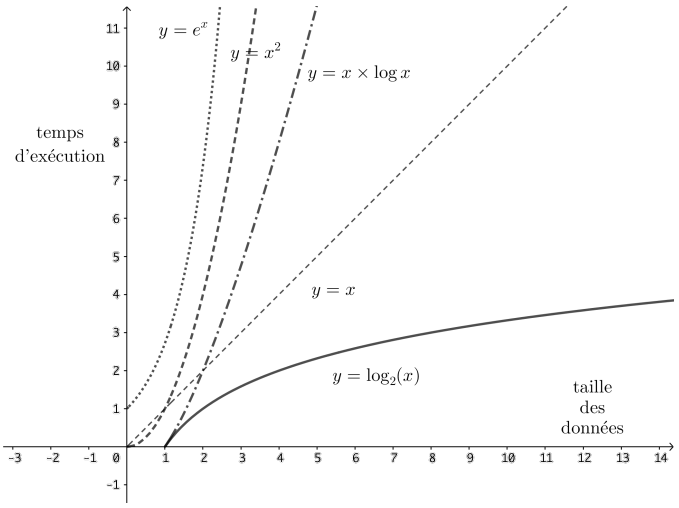
- Diviser : partager le problème en sous-problèmes de même nature (souvent de taille n /2)
- Régner : résoudre ces différents sous-problèmes (généralement récursivement)
- Combiner : fusionner les solutions pour obtenir la solution du problème initial

Avantage : gain en complexité

Rappel pour les calculs de complexité : on peut voir le logarithme entier en base deux d'un entier comme le nombre de chiffres nécessaire à son écriture en base 2, ou bien, de manière équivalente, comme l'exposant de la plus petite puissance de 2 strictement supérieure.

Par exemple, $217 = \underbrace{1101\,1001}_{\text{8 chiffres}} < 256 = 2^8$ et

$$1024 = 2^{10} = \underbrace{100\,0000\,0000}_{\text{11 chiffres}} < 2^{11}$$



Exemple simple : juste prix en récursif

Exercice introductif : l'utilisateur donne un nombre à deviner à l'ordinateur. Programmer la fonction récursive `justePrix (borne_inf, borne_sup, prix)`, qui permet à l'ordinateur de trouver le plus rapidement possible le nombre à trouver.

Signature de la fonction

```
def justePrix(borne_inf, borne_sup, prix) :
    """
    Trouve récursivement un nombre donné par l'utilisateur
    @param borne_inf, borne_sup, prix : entiers vérifiant borne_inf ≤ prix ≤ borne_sup
    """
```

La complexité de l'algorithme que vous avez codé est, si vous avez codé un algorithme efficace, $O(\log n)$.

En effet, la taille de l'intervalle `[borne_inf...borne_sup]` est divisée par deux à chaque appel de la fonction récursive.

Si on déroule le fonctionnement de l'algorithme à l'envers, on multiplie la taille de l'intervalle par deux à chaque étape :

Fin : `prix = borne inf = born sup` de 1ongueur 1
`[borne_inf...borne_sup]` de longueur 2
`[borne_inf...borne_sup]` de longueur 4
…
`[borne_inf...borne_sup]` de longueur $2^n \geq$ `borne_sup - borne_inf`

On retrouve bien la définition du logarithme entier en base 2 telle que donnée ci-dessus.

Exemple : le tri fusion

Rappel : les tris connus, par sélection sélection ou par insertion, sont de complexité quadratique, $O(n^2)$. Ce paragraphe va donner un exemple de tri plus efficace.

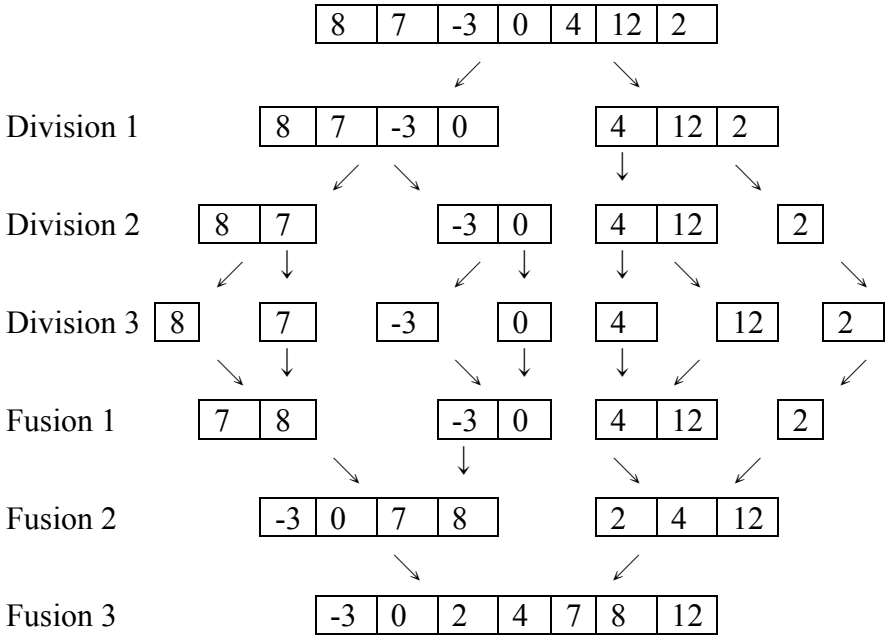
Principe :

- on se donne une liste de longueur n, d'objets de même type, comparables.
- on scinde la liste en deux sous-listes de même longueur (à 1 près), de manière récursive

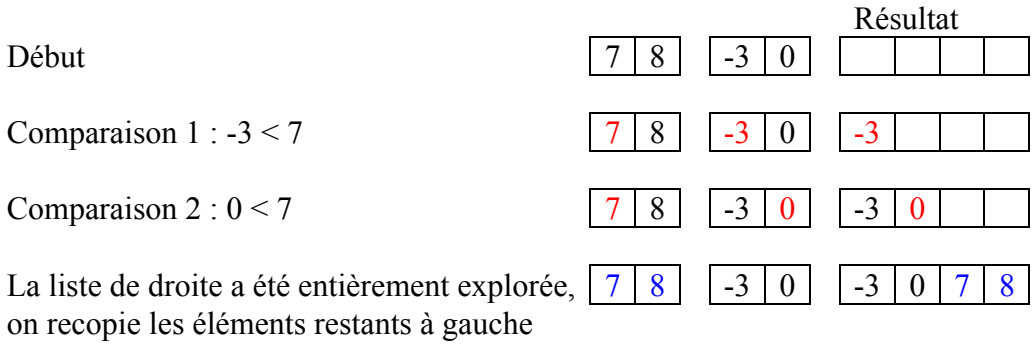
- jusqu'à obtenir des listes de longueur 1. Qui sont triées : avec un seul élément, ce n'est pas trop dur…
- On remonte la récursivité en fusionnant deux listes « voisines » de manière à conserver l'ordre sur le résultat.

Exemple :

- Fonctionnement général de l'algorithme



- Détails de la phase de combinaison.
  On parcourt les deux sous-listes de gauche et de droite en même temps, en triant les éléments au fur et à mesure.
  Supposons que le programme en soit au moment où il doit combiner les tableaux [7, 8] et [-3, 0].



Complexité :
Comme on divise la taille du tableau par 2 à chaque appel récursif, on fait $\log n$ appels. Lors de la phase de combinaison, on parcourt les listes de gauche et de droite, donc en temps n à chaque appel récursif. D'où une complexité quasi linéaire $O(n \log n)$.

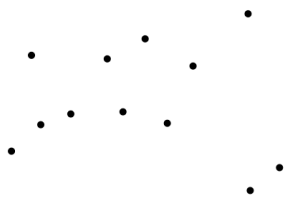
Remarque pour la programmation : utiliser des slices `[a : b]` n'est pas obligatoire, on peut très bien recopier les listes élément par élément, notamment avec des listes par compréhension.

Programme :

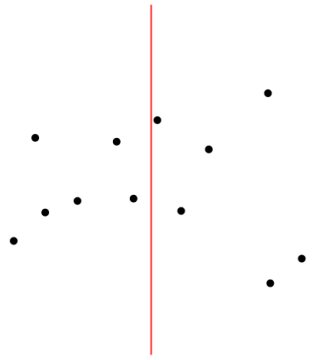
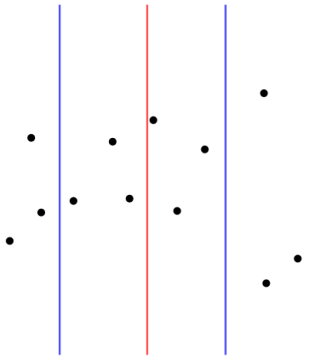
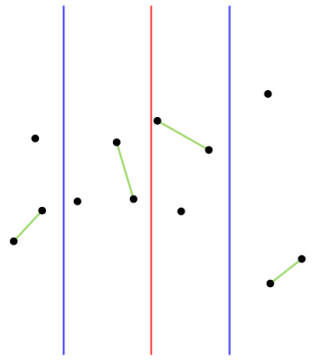
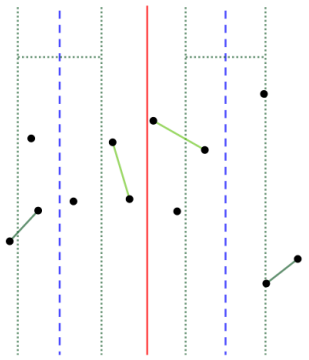
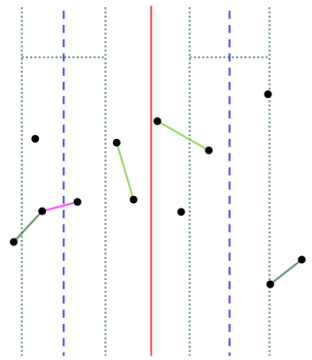
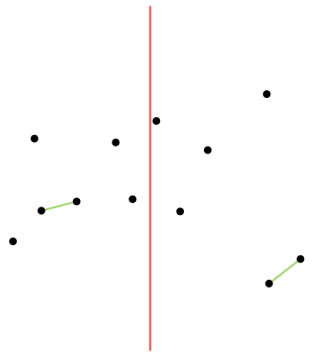
```
def tri_fusion(liste) :
      """
      Sépare la liste en deux
      Et appelle récursivement sur les sous-listes la fusion/combinaison des
      résultats
      """
      if len(liste) <= 1 :
         return liste
      else :
          milieu = len(liste)//2
          gauche = liste[:milieu]
          droite = liste[milieu:]
          # ou
          # gauche = [liste[i] for i in range(milieu)]
          # droite = [liste[i] for i in range(milieu, len(liste)]
          return fusion(tri_fusion(gauche), tri_fusion(droite))

def fusion(gauche, droite) :
      """
      Fusionne deux listes triées en seule liste triée
      """
      resultat = []
      indice_gauche = 0
      indice_droite = 0

      while indice_gauche < len(gauche) and indice_droite < len(droite):
          if gauche[indice_gauche] < droite[indice_droite]:
              resultat.append(gauche[indice_gauche])
              indice_gauche = indice_gauche +1
          else :
              resultat.append(droite[indice_droite])
              indice_droite = indice_droite +1

       if indice_gauche == len(gauche):
          while indice_droite != len(droite):
              resultat.append(droite[indice_droite])
              indice_droite = indice_droite + 1

       if indice_droite == len(droite):
          while indice_gauche != len(gauche):
              resultat.append(gauche[indice_gauche])
              indice_gauche = indice_gauche + 1
      return resultat
```

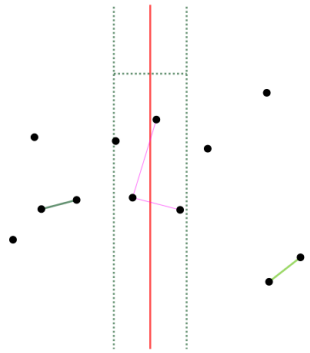
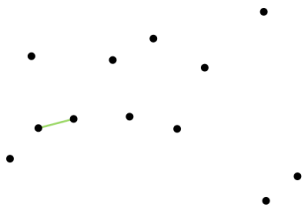
Exemple visuel : recherche des deux points les plus proches dans un nuage planaire

On dispose de points dans un plan. On cherche quels sont les deux points les plus proches. Par force brute, on ordonne les points par coordonnée x croissante (tri fusion ou tri rapide de complexité $O(n\log n)$). Puis, pour chaque point M_i d'abscisse x_i, on calcule toutes les distances M_iM_j avec $j \geq i$. On retrouve un « classique » du calcul de complexité, à savoir que le nombre d'itérations est $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$, soit une complexité quadratique $O(n^2)$ (on rappelle que dans ce cas le coût du tri en $O(n\log n)$ est négligeable en comparaison).

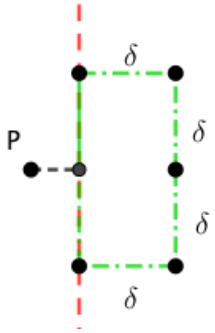


Avec diviser pour régner : on commence par créer deux tableaux ordonnés avec les points. L'un, T_x, est ordonné suivant les abscisses *x* croissantes, l'autre T_y est ordonné suivant les ordonnées *y* croissantes. On a donc une complexité $O(n \log n)$

	
Descente récursive 1 (et suivantes): Avec T_x , on scinde l'ensemble de points en deux parties de taille égale à 1 près.	Descente récursive 2 et suivantes : On scinde chaque sous-ensemble en deux parties de taille égale à 1 près (toujours avec T_x)
	
Fin de la descente récursive : Dans chaque ensemble de 2 ou 3 points, on résout le problème directement. Avec 2 points il n'y a qu'une seule possibilité, avec 3 points on fait 2 comparaisons. On obtient d_{min} dans chaque partie.	Phase de combinaison : On crée une bande de largeur 2δ , où $\delta = \min\left(d_{\text{min gauche}}, d_{\text{min droit}}\right)$. Avec δ de chaque côté de la bande médiane
	
Dans cette bande, pour chaque point à gauche, on calcule les distances avec points de droites qui sont « autour » de ce point dans le tableau T_y (cf ① ci-dessous). On prend le minimum de ces distances $d_{\text{min milieu}}$	La phase de combinaison se termine en prenant le minimum des trois distances $d_{\text{min gauche}}$, $d_{\text{min droite}}$, $d_{\text{min milieu}}$

	
On itère le processus en remontant la récursivité. Ici on a représenté le calcul de certaines distances à cheval sur droite et gauche	Fin.

① Lors de ce calcul, pour un point donné de gauche d'ordonnée y_g , on se contente de calculer les distances avec les points de droite situés dans le rectangle centré en ordonnée y_G , de hauteur (ordonnées) $2d$, et de largeur d. On a au maximum 8 points dans ce rectangle (aux coins et 2×2 au milieu de chaque grand côté, en considérant deux carrés côte à côte). Un de ces points du milieu étant alors P. Donc on a maximum 7 points concernés.



On trouve ces points par une recherche dichotomique dans le tableau trié T_y (complexité $O(\log n)$), on cherche le premier point dans T_y : $M_D(x_D;y_D)$ tel que $y_D \geq y_G - \delta$, et n'étant pas à gauche. Puis on calcule les distances sur les 7 points suivants de droite dans T_y, ou bien on calcule les distances tant que $y_D \leq y_G + \delta$.

Complexité : Lors de la phase de combinaison, la recherche dans le tableau T_y par dichotomie est de complexité $O(\log n)$, et on répète 6 fois les calculs de distance au plus, pour chaque point de gauche. Donc la complexité est $O(6n) = O(n)$. Ajoutant à cela la division par 2 à chaque étape récursive, la complexité de cet algorithme est $O(n \log n)$ (y compris les tris initiaux).

Exercices

Exercice 1 : Recherche du couple `(minimum, maximum)` dans un tableau avec une méthode « diviser pour régner ».

On scindera le tableau en deux parties et on effectuera la recherche récursivement.
Si le tableau a une taille de 2, alors le couple `(minimum, maximum)` s'obtient directement par comparaison des deux valeurs.
Si le tableau a une taille de 1, alors le couple `(minimum, maximum)` est composé de deux fois l'unique valeur du tableau.
Lors de la phase de combinaison, on comparera les résultats « remontant » de la récursivité pour obtenir le résultat.
Écrire le programme qui donne ce couple. Donner la complexité de l'algorithme.
Remarque : ceux qui sont à l'aise essaieront autant que possible de ne pas utiliser de slices, mais plutôt des indices de début et de fin. Ceci pour des raisons d'efficacité lors de l'implémentation.

Exercice 2 : Recherche du sous-tableau de somme maximale dans un tableau contentant des nombres positifs et négatifs, avec une méthode « diviser pour régner ».

On donne un tableau contenant des nombres positifs et négatifs. On veut trouver la somme maximale d'éléments consécutifs de ce tableau

Exemple : le tableau est `T = [-2, -5, 6, -2, -3, 1, 5, -6]`. La somme maximale est `7`, correspondant aux nombres en gras.

Principe de l'algorithme :

Si le tableau `T` a 1 élément :

Résoudre directement le problème (pas très compliqué normalement…)

Sinon :

Diviser T en deux sous-tableaux `T1` et `T2`

Résoudre le problème sur chacun des tableaux `T1` et `T2`

Renvoyer la meilleure des trois solutions (sur `T1`, sur `T2`, et à cheval sur `T1` et `T2`). Pour la solution à cheval, on part du milieu (la fin de T1 / respectivement le début de T2), et on cherche la somme maximale à gauche (respectivement à droite), puis on ajoute les deux.

Faire tourner cet algorithme « à la main » sur l'exemple donné, puis le programmer. On pourra créer une fonction chargée de calculer la somme maximale à cheval sur les deux tableaux. Il n'est pas indispensable d'écrire une fonction spécifique pour la combinaison des résultats.

Donner la complexité de l'algorithme, et comparer avec le calcul par force brute, où l'on calcule toutes les distance possibles.

Remarques/compléments :

- Cet exercice permet de trouver le couple `(T[i] , T[j])` dans un tableau, tel que `T[j] - T[i]` soit maximal (avec `i < j`). Comment, c'est une bonne question.
- *Remarquez* la similitude avec l'exemple de la recherche du couple de points les plus proches dans un plan, à deux dimensions. Cet exercice est dans une seule dimension.
- l'algorithme de recherche d'un couple de points de distance minimale dans un nuage se généralise en dimension quelconque. Sans chercher à écrire le programme, expliquer la méthode en dimension 3 est un excellent exercice.

Exercice 3 *(source WIkipedia)* :Algorithme de Karatsuba (mathématicien soviétique, 1937 – 2008)

Cet algorithme permet d'effectuer plus rapidement une multiplication que la méthode usuelle, notamment dans le cas de grands nombres.

Le calcul naïf d'un produit est : $\left(a\times 10^k + b\right)\left(c\times 10^k + d\right) = ac\times 10^{2k} + \left(ad + bc\right)\times 10^k + bd$. Vérifiez sur un exemple, comme 28×56, c'est ce que vous faites lorsque vous posez la multiplication. Ce calcul demande quatre produits : *ac*, *ad*, *bc* et *bd*. Quand les deux nombres font *n* chiffres, la complexité est quadratique : $O\left(n^2\right)$.

En 1960, Karatsuba remarque que le calcul peut être fait avec seulement trois produits :

$$\left(a\times 10^k + b\right)\left(c\times 10^k + d\right) = ac\times 10^{2k} + \left(ac + bd - \left(a-b\right)\left(c-d\right)\right)\times 10^k + bd$$

Vérifiez que ça fonctionne. Au moins de tête !

La méthode est appliquée de manière récursive pour les calculs de *ac*, *bd*, et $\left(a-b\right)\left(c-d\right)$ en scindant à nouveau *a, b*, *c* et *d* en deux.

Comme la multiplication par 10 pour les humains et par 2 pour les machines correspond à l'ajout d'un 0 en fin, et que les additions sont peu coûteuses en temps, le gain de complexité n'est pas négligeable. On obtient une complexité de $O\left(n^{\log 3}\right) \simeq O\left(n^{1,585}\right)$. Pour des nombres de 1000 chiffres, on passe ainsi de 1000000 de multiplications avec la méthode traditionelle à seulement 50000 avec l'algorithme de Karatsuba. Le coût des additions est négligeable.

Exemple :

- Descente récursivité étape 1

$$1237\times2587 = 12\times25\times10^4 + \left(12\times25+37\times87-\left(\underbrace{12-37}_{-25}\right)\left(\underbrace{25-87}_{-62}\right)\right)\times10^2+37\times87$$

- Descente récursivité étape 2 + remontée étape 2

$$\begin{cases} 12\times25 = 1\times2\times10^2+\left(1\times2+2\times5-(1-2)(2-5)\right)\times10+2\times5=300 \\ 25\times62 = 2\times6\times10^2+\left(2\times6+5\times2-(2-5)(6-2)\right)\times10+5\times2=1550 \\ 37\times87 = 3\times8\times10^2+\left(3\times8+7\times7-(3-7)(8-7)\right)\times10+7\times7=3219 \end{cases}$$

- Remontée récursivité étape 1 :

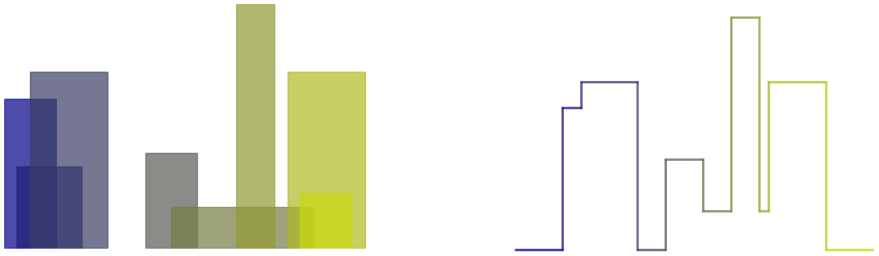
$$1237\times2587 = 300\times100^2+\left(300+3219-1550\right)+3219=3200119$$

- Le calcul a demandé 9 produits au lieu de 16 par la méthode traditionnelle. Bien sûr, à la main c'est fastidieux. Mais pas pour une machine.

Programmer la fonction `karatsuba(x, y, n)`, où `x` et `y` sont deux entiers strictement positifs de `n` chiffres. Attention pour l'appel récursif : on n'utilise pas `n//2` ici, mais `ceil(n/2)` (la valeur supérieure et non inférieure), à importer de la bibliothèque `math`. Pourquoi ? réfléchissez.

Exercice 4 : dessiner la ligne d'horizon dans une ville.

Dans une ville vue en deux dimensions, les `immeubles` sont donnés par un triplet de coordonnées `(gauche, hauteur, droite)`. On veut dessiner la ligne d'horizon, c'est-à-dire ne montrer que les lignes qui sont visibles, et cacher celles qui sont derrière des immeubles.
Le programme va renvoyer une liste de segments `horizon`. Ces segments sont donnés par un couple `(gauche, hauteur)`. On peut remarquer qu'un tel segment a comme limite droite la coordonnée gauche de son successeur (sauf pour celui le plus à droite, on verra ultérieurement comment préciser cette limite)
On va construire cette ligne d'horizon par une méthode « diviser pour régner ».



Remarque : comme dans les exercices précédents, cet exercice peut se faire par une méthode directe. La complexité est en $O\left(n^2\right)$ contre $O\left(n\log n\right)$ avec diviser pour régner.

Données : les immeubles seront donnés par ordre de coordonnée gauche croissante.
Exemple : exemple visualisé ci-dessus

```
immeubles = [(1, 11, 5), (2, 6, 7), (3, 13, 9), (12, 7, 16), (14, 3, 25),
             (19, 18, 22), (23, 13, 29), (24, 4, 28)]
```

Exemple pour la phase de fusion (elle ressemble à celle du tri-fusion) :
On a deux lignes d'horizon `h1` et `h2`. Ce sont les lignes d'horizon de la dernière phase de fusion correspondant à la liste d'immeubles ci-dessus.

```
h1 = [(1, 11), (3, 13), (9, 0), (12, 7), (16, 0)]
h2 = [(14, 3), (19, 18), (22, 3), (23, 13), (29, 0)]
```

Et une ligne d'horizon résultante, initialement vide

```
hr = []
```

Deux variables `hauteur1` et `hauteur2` sont initialisées à 0. `hauteur1` sera mise à jour quand un segment de `h1` est ajouté à `hr`, et `hauteur2` sera mise à jour quand un segment de `h2` est ajouté à `hr`.

- On compare `(1, 11)` et `(14, 3)`. Le premier segment a pour coordonnée `x = 1 < 14`, on l'ajoute dans le résultat. On augmente l'indice de parcours de `h1` de `1`.
  `hr = [(1, 11)]  hauteur1 = 11`
- On fait de même avec `(3, 13)`, `(9, 0)` et `(12, 7)` (comparés avec `(14, 3)`)
  `hr = [(1, 11) (3, 13), (9, 0), (12, 7)]  hauteur1 = 7`
- On fait de même avec `(16, 0)` et `(14, 3)`. Ici, c'est le deuxième segment, de `h2`, qui a la coordonnée `x` la plus petite : `16 > 14`
  On ajoute donc un segment de coordonnées `x = 14` dans `hr`. Comme on ajoute un segment de `h2`, on met à jour `hauteur2`, et on calcule la hauteur du segment à rajouter en prenant le maximum des deux hauteurs.
  `hauteur2 = 3`
  `nouvelle hauteur = max (hauteur1, hauteur2) = max (7, 3) = 7`
  D'où `hr = [(1, 11) (3, 13), (9, 0), (12, 7), (14, 7)]`
- On reprend à nouveau `(16, 0)`et on le compare avec `(19, 18)`. Comme `16 < 19`, on ajoute le segment à partir du `x` de `h1`. La variable hauteur1 est mise à jour : `hauteur1 = 0`
  Donc `nouvelle hauteur = max (hauteur1, hauteur2) = max (0, 3) = 3`
  Puis `hr = [(1, 11) (3, 13), (9, 0), (12, 7), (14, 7), (16,3)]`
- h1 a été entièrement parcouru, on ajoute les segments restants de h2
  ```
  hr = [(1, 11) (3, 13), (9, 0), (12, 7), (14, 7), (16,3),
        (19, 18), (22, 3), (23, 13), (29, 0)]
  ```
- On remarque que deux segments consécutifs, `(12, 7)` et `(14, 7)`, ont la même hauteur. On nettoie hr en enlevant le deuxième.
  ```
  hr = [(1, 11) (3, 13), (9, 0), (12, 7), (16,3),
        (19, 18), (22, 3), (23, 13), (29, 0)]
  ```
- Dans le code, plutôt que de nettoyer la liste a posteriori, il est plus simple (et moins coûteux en temps suivant l'implémentation) de ne pas rajouter un segment si le segment précédent est de la même hauteur

Un fichier python d'utilitaires est donné (utilitaires_ligne_horizone.py). Il doit être dans le même dossier que le fichier « tnsi_07_dr_horizon_exo.py », qui est à compléter. Ce dernier vous permet d'avoir les spécifications des fonctions ainsi qu'un affichage du résultat

1. Programmer la fonction de fusion comme ci-dessus. On l'appelle `fusionSkyLine(h1, h2)`. Ne pas oublier le cas où on finit de parcourir `h2` avant `h1`. Ce qui en théorie, vu la manière dont on fait les appels récursifs, ne devrait pas se produire. Ceci dit : « en théorie, la théorie et la pratique c'est pareil, mais en pratique, c'est pas vrai ».
2. Programmer la fonction récursive `horizonRec(immeubles)` qui va construire la ligne d'horizon par appel de `fusionSkyLine(h1, h2)`. Réfléchissez bien à ce qu'on doit renvoyer quand il y a un seul immeuble, c'est là qu'est la subtilité.
3. Pour ceux qui ont du temps.
   a. Créer une fonction qui génère aléatoirement une liste d'immeubles correctement triée, et avec un aspect esthétique si possible.
   b. Sans regarder la solution (qui est dans le fichier d'utilitaires), construire la fonction qui, étant donné la liste `hr`, renvoie les coordonnées des points qui permettent le tracé de la ligne. Comparer la complexité spatiale entre `hr` et cette liste de points.
   c. Pour ceux qui ont vraiment beaucoup de temps, faire la version avec des toits pointus/obliques (l'idée paraît sympathique, votre prof vous fait confiance pour trouver). A priori, la seule difficulté, pas énorme, est de trouver les points d'intersection. Il faut également changer la structure des triplets immeubles en `(gauche, hauteur gauche, hauteur milieu, hauteur droite, droite)`, ce qui couvre tous les cas possibles. On rentre ici dans le domaine de l'art génératif (https://fr.wikipedia.org/wiki/Art_génératif). C'est un sujet éventuel pour le grand oral.