MATRICES ET GRAPHES

A - Les matrices : introduction

1) Exemple introductif

Une communauté urbaine s'intéresse à la gestion des déchets des foyers. Après analyse, on constate qu'un habitant produit 354 kg de déchets par an, dont en particulier 35% d'ordures ménagères, 25% de déchets recyclables, et 31% de déchets « verts » compostables[1]. On peut résumer ces pourcentages dans une matrice ligne, de dimension 1x3, une ligne et trois colonnes :

$$\begin{pmatrix} 0,35 & 0,25 & 0,31 \end{pmatrix}$$

On aurait pu tout aussi bien écrire les résultats dans une matrice colonne, de dimension 3x1 (3 lignes et une colonne)

$$\begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,25 \\ 0,31 \end{pmatrix}$$

Une analyse plus fine par quartiers et par type d'habitation donne les résultats suivants :

- Centre-ville, majoritairement des appartements :
  40% d'ordures ménagères, 40% de déchets recyclables, et 11% de déchets « verts » ;
- Zone pavillonnaire résidentielle :
  26% d'ordures ménagères, 25% de déchets recyclables, et 40% de déchets « verts » ;
- Zone agricole péri-urbaine :
  35% d'ordures ménagères, 11% de déchets recyclables, et 45 % de déchets « verts ».

On peut également résumer ces informations dans une matrice, qui est cette fois-ci carrée, de dimension 3x3

$$\begin{array}{l} \text{centre-ville} \rightarrow \\ \text{pavillonnaire} \rightarrow \\ \text{agricole} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,11 \\ 0,26 & 0,25 & 0,4 \\ 0,35 & 0,11 & 0,45 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la production de déchets par habitant et par quartier, on peut multiplier la matrice par 354, ce qui donne:

$$354 \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,11 \\ 0,26 & 0,25 & 0,4 \\ 0,35 & 0,11 & 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 141,6 & 141,6 & 38,94 \\ 92,04 & 88,5 & 141,6 \\ 123,9 & 38,94 & 159,3 \end{pmatrix}$$

On arrondi au kilogramme près :

$$\begin{pmatrix} 141,6 & 141,6 & 38,94 \\ 92,04 & 88,5 & 141,6 \\ 123,9 & 38,94 & 159,3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 142 & 142 & 39 \\ 92 & 89 & 142 \\ 124 & 39 & 159 \end{pmatrix}$$

La municipalité faisait payer les déchets sur une base de 1 € le kilogramme. Pour favoriser le tri et le recyclage, si elle passe à 1 €/kg pour les ordures ménagères, 0,8 €/kg pour les déchets recyclables et 0,3 €/kg pour le compostable, alors on fait le produit des matrices suivantes (observez l'organisation du calcul) :

[1] Les chiffres sur le web sont assez variables, en voici deux exemple : 354 kg de déchets par an et par habitant dont 20% recyclage, 14% compost, 30% incinération, 36% décharge. Autres chiffres (ceux retenus pour ce cours) : 35% ordures ménagères, 25% recyclable, 6% verre, 31% compost, 6% autres

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1\\0,8\\0,3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}142&142&39\\92&89&142\\124&39&159\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\boxed{142\times1+142\times0,8+39\times0,3=267,3}\\92\times1+89\times0,8+142\times0,3=205,8\\124\times1+39\times0,8+159\times0,3=202,9\end{pmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow\ \text{prix pour le centre-ville}\\\rightarrow\ \text{prix pour le pavillonnaire}\\\rightarrow\ \text{prix pour la zone agricole}\end{array}\end{array}$$

On peut également comparer plusieurs hypothèses de tarification :

- en colonne 1, 1 €/kg quel que soit le type de déchets ;
- en colonne 2, 1 €/kg pour les ordures ménagères, 0,8 €/kg pour les déchets recyclables et 0,3 €/kg pour les compostables ;
- en colonne 3, 1,5 €/kg pour les ordures ménagères, 0,5 €/kg pour les déchets recyclables et 0,1 €/kg pour les compostables.

Le produit matriciel donne alors le tarif total pour chaque type de foyer et chaque tarification possible :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&1&\boxed{1,5}\\1&0,8&\boxed{0,5}\\1&0,3&\boxed{0,1}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}142&142&39\\\boxed{92}&\boxed{89}&\boxed{142}\\124&39&159\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}323&267,3&287,9\\323&205,8&\boxed{196,7}\\322&202,9&221,4\end{pmatrix}\end{array}$$

Exemple du calcul encadré : $92\times1,5+89\times0,5+142\times0,1=196,7$

On peut aussi plus subtilement faire un calcul plus subtil, où l'on considère le nombre de personnes par foyer suivant le quartier. On suppose qu'il y a en moyenne 1,5 personne par foyer en centre-ville, 3 en zone résidentielle et 2,1 en zone agricole. Comment écrire un produit matriciel qui permet de connaître la production de déchets par foyer ? Qu'en déduit-on comme condition nécessaire et suffisante, sur les dimensions des matrices, pour pouvoir faire un produit matriciel ?

2) Notion de matrice

Définition : Une matrice A de dimension $n\times p$ est un tableau de nombres –réels– constitué de n lignes et de p colonnes. Les nombres sont appelés coefficients de la matrice.

On note en général $a_{i,j}$ le coefficient se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On peut noter en conséquence la matrice $\mathrm{A}=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$

Lorsque $n = p$, la matrice est dite carrée d'ordre ou de dimension n.
Lorsque $n = 1$, la matrice est une matrice ligne (une seule ligne).
Lorsque $p = 1$, la matrice est une matrice colonne (une seule colonne).

Remarque : la notation des indices i et j commence à 1, et non à 0, contrairement aux suites ou aux conventions en informatique.

Matrices particulières :

- Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls pour $i \neq j$. C'est-à-dire que les seuls coefficients éventuellement non nuls sont sur la diagonale principale. On la note parfois $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les éléments de la diagonale.
- La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale de dimension n, dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Elle est notée I_n, ou I plus simplement.
- La matrice nulle de taille $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0. Elle est notée $0_{n,p}$, ou 0 plus simplement.

Définition : deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même dimension, et leurs coefficients respectifs sont égaux.

Définition : une matrice carrée de dimension n est symétrique si et seulement si $\forall i \in [1 \ldots n] \quad \forall j \in [1 \ldots p] \quad a_{i,j} = a_{j,i}$

Exemple : donner I_3, $0_{3,2}$ et un exemple de matrice symétrique

3) <u>Opérations sur les matrices</u>

Définition : Soient A et B deux matrices de même dimension.
La matrice C = A + B est la matrice dont le coefficient $c_{i,j}$ situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \ldots$

Propriétés (compléter par une formule) :
L'addition de deux matrices est commutative :
L'addition de matrices est associative :
La matrice $\mathrm{O}_{n,p}$ est élément neutre pour l'addition des matrices de dimension $n \times p$:

Définition/théorème : Soit A la matrice de dimension $n \times p$ et de coefficients $a_{i,j}$. Alors la matrice de dimension $n \times p$ et de coefficients $-a_{i,j}$, notée –A, vérifie $\mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = 0_{n,p}$. La matrice –A est appelée matrice opposée de A.

Remarque : les propriétés précédentes font que l'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ muni de l'addition est un groupe commutatif[2], et permettent de définir la soustraction de matrices.

Définition : le produit de la matrice A par le réel k est la matrice notée $k \cdot \mathrm{A}$, dont les coefficients sont égaux à $k \cdot a_{i,j}$.

Cette définition est cohérente avec la définition de la matrice opposée –A, égale à $-1 \times \mathrm{A}$.

Définition : Soit A une matrice de dimension $m \times n$ et B une matrice de dimension $n \times p$. Le produit de la matrice A par la matrice B, noté $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ou AB, est la matrice C de dimension $m \times p$ et de coefficients $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$.

Remarque : calculer un produit de matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la matrice de gauche est égale au nombre de colonnes de la matrice de droite.

[2] Vous en connaissez beaucoup d'autres. Cherchez des exemples. Que pensez vous de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, des restes possibles dans la division par n, muni de l'addition modulo n ? $(\mathbb{N}, +)$ est-il un groupe ?

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 4\times1+2\times3+(-1)\times(-5)=15$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$$ détails :

Propriétés (compléter par une formule) :

- Le produit de matrices est associatif :
- Le produit est distributif par rapport à l'addition :
- La matrice nulle est un élément absorbant pour le produit :
- La matrice identité est un élément neutre pour le produit (cas des matrices carrées) :
- Le produit de matrices est compatible avec le produit par un réel :

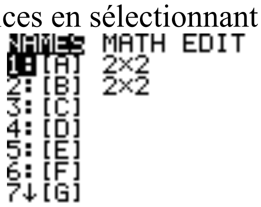
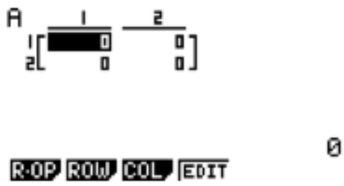
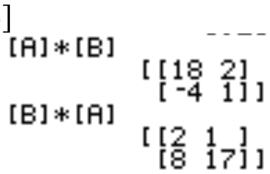
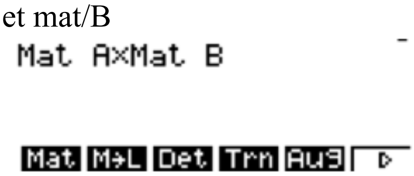
$$k(\mathrm{AB}) = (k\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(k\mathrm{B}),\ \text{on note } k\mathrm{AB}.$$

Par contre le produit de matrice n'est pas commutatif, contre-exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Définition : soit A une matrice carrée de dimension n, et k un entier naturel non nul. La puissance k-ième de A est la matrice $\mathrm{A}^k = \underbrace{\mathrm{A}\times\mathrm{A}\times\mathrm{A}\times\ldots\times\mathrm{A}}_{k\text{ fois}}$.

A la calculatrice :

<table>
<tr><th>Texas</th><th>Casio</th></tr>
<tr><td>Entrer dans le menu matrice 2nde x^{-1}</td><td>sélectionner RUN-MAT puis ▶MAT</td></tr>
<tr><td>Editer les matrices en sélectionnant EDIT

</td><td>Editer la matrice A en sélectionnant puis EXE

</td></tr>
<tr><td>Pour le Calcul de AB (exemple précédent)
Entrer dans le menu matrice 2nde x^{-1}
sélectionner [A]
puis Entrer dans le menu matrice 2nde x^{-1}
sélectionner [B]

</td><td>Pour le Calcul de AB
Dans l'écran de calcul, sélectionner la matrice A dans OPTN/MAT/mat/A
Puis × et mat/B

</td></tr>
</table>

Plein de possibilités dans les menus, à farfouiller

4) Matrice carrée inversible

Définition : une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $\mathrm{A}\times\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Théorème : Si A^{-1} existe, alors $\mathrm{A}\times\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, et A^{-1} est unique.

Définition (exemple des matrices carrées d'ordre 2) : Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le déterminant de la matrice A est le réel $\det(A)=ad-bc$.

Théorème : Une matrice carrée d'ordre 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. On a alors $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration :

- Montrer que si $\det(A)\neq 0$, la matrice $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de A, en faisant le calcul

- Réciproquement, on suppose que A est inversible, et on va montrer qu'alors $\det(A)\neq 0$. Pour cela utiliser un raisonnement par l'absurde.
  - On suppose donc que $\det(A)=0$. Soit B la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Pourquoi a-t-on $B=A^{-1}\times A\times B$?
  - En calculant $A^{-1}\times A\times B$ de deux manières différentes, en déduire que $B=0_2$
  - En déduire A et conclure.

Démonstration bis : résoudre l'équation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où *a*, *b*, *c*, et *d* sont des paramètres, *x, y*, *z* et *t* étant les inconnues.

- Étape 1 : avec les lignes (S) : $\begin{cases} ax+cy=1 \\ bx+dy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adx+cdy=d \\ bcx+dcy=0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{d}{ad-bc}$ avec $ad-bc\neq 0$ On traitera le cas $ad-bc=0$ ultérieurement
- Étape 2 : calculs similaires pour *y*, *z* et *t*.

- Étape 3 : réciproquement, on vérifie qu'avec ces valeurs l'égalité recherchée est bien vérifiée (cf. démonstration précédente)
- Étape 4 : on traite le cas $ad-bc=0$. Montrer que dans ce as, avec le système (S), alors $d = 0$, puis $c = 0$ avec l'autre système partiel, et enfin $b = 0$ puis $a = 0$. Conclure

Remarques :

- le déterminant d'un matrice carré d'ordre supérieur à 2 existe et se calcule également, ce n'est pas au programme de terminale. Comme pour les matrice 2×2, une matrice carrée d'ordre $n > 2$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. La calculatrice donne directement le calcul du déterminant et de l'inverse d'une matrice (notation sur TI : $\left[\mathrm{A}\right]^{-1}$).
- Si nécessaire et s'il n'y a pas d'indications dans l'énoncé, on calculera l'inverse d'une matrice carrée d'ordre ≥ 3 à la calculatrice.

Application à la résolution de système :
Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme :
$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$. On vérifie immédiatement que cette écriture équivaut à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$
, égalité matricielle que l'on notera AX = E ①
Alors le système admet une solution unique si et seulement si la matrice A est inversible, cette solution est obtenue en multipliant les deux membres de ① par A^{-1} , on obtient $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{E}$.
Exemple : résoudre le système

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ -5x+4y=2 \end{cases}$$

Remarques :

- Cette méthode se généralise immédiatement à un système linéaire de n équations à n inconnues.
- Pour un système de deux équations à deux inconnues, il n'est pas évident que cette méthode soit plus rapide qu'un calcul avec les méthodes usuelles (combinaisons linéaires notamment), y compris avec une calculatrice.
- Si la matrice A n'est pas inversible, alors le système admet soit 0 solution, soit une infinité de solutions.
- On a vu que l'ensemble des matrices carrées de dimension n muni de l'addition est un groupe commutatif. En munissant cet ensemble du produit, associatif, disposant d'un élément neutre, on obtient une structure d'anneau[3].

[3] $(\mathbb{Z},+,\times)$ est-il un anneau ? $(\mathbb{R},+,\times)$? Dans cette dernière structure, tout élément, sauf le neutre de l'addition, est inversible : on a alors une structure de corps (commutatif car le produit est commutatif). L'ensemble des matrices carrés d'ordre n muni de l'addition et du produit tels que définis ci-dessus est-il un corps ?

B - Les graphes : introduction

1) Définitions

De manière très informelle, un graphe c'est : des ronds dont certains peuvent être reliés par des traits. Pour être un peu plus rigoureux, un graphe est constitué :

- D'un ensemble de **sommets** (parfois appelés nœuds). Les sommets ont souvent une **étiquette**.
- D'un ensemble de relations entre ces sommets. Les relations peuvent être à sens unique (par exemple on peut aller du sommet A vers le sommet B mais pas de B vers A), ou à double sens. Dans le premier cas, le graphe est **orienté** et les relations s'appellent des **arcs**. Dans le deuxième cas, le graphe n'est pas orienté et les relations s'appellent des **arêtes**. Deux sommets reliés par un arc ou une arête sont **adjacents** (ou voisins).

L'**ordre** d'un graphe est le nombre total de ses sommets.

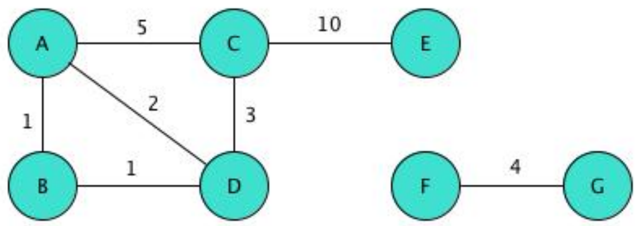
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Dans un graphe orienté, on compte les arêtes entrantes et les arêtes sortantes ; et l'on peut distinguer le demi-degré entrant (l'arc est dirigé vers le sommet) et le demi-degré sortant (l'arc part du sommet).

Un **chemin** (graphe orienté) / **chaîne** (graphe non orienté, moins utilisé, on dit souvent chemin aussi) entre deux sommets est une suite de sommets partant de l'un pour arriver à l'autre. Le sommet d'arrivée est un **successeur** du sommet de départ ; et le sommet de départ est un **prédécesseur** du sommet d'arrivée. La longueur du chemin est le nombre d'arêtes parcourues (soit le nombre de sommets diminué de 1). Un chemin est **élémentaire** ou **simple** s'il ne contient pas plusieurs fois le même sommet.

Un graphe peut être **valué** ou **pondéré**. On associe dans ce cas à chaque arc ou arête une valeur numérique.

Exemple (et remarque sur l'exemple) :

L'exemple ci-contre peut donner l'impression qu'il y a deux graphes. Il n'y en a qu'un seul. Le graphe est non **connexe**.



ADCABDE est un chemin de A à E. La longueur du chemin est le nombre d'arêtes parcourues (soit le nombre de sommets diminué de 1). ADCABDE n'est pas un chemin élémentaire de A à E, par contre ABDCE en est un.

Exemples : graphes complets

dans un graphe complet, tous les sommets sont deux à deux adajacents.

Remarques :

- Un sommet peut être relié à lui-même (**boucle**).
- Vous pourrez trouver sur le web des graphes où il existe plusieurs arêtes ou arcs entre deux sommets (multigraphes). Nous n'utiliserons pas ce type de graphe.
- Un graphe est dit simple s'il n'admet pas de boucle et s'il n'est pas un multigrpahe

Propriété : la somme des degrés d'un graphe simple est égale au double du nombre de ses sommets.

Corollaire : dans un graphe simple, le nombre de sommets de degré impair est pair.

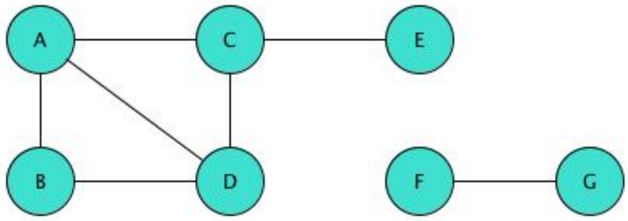
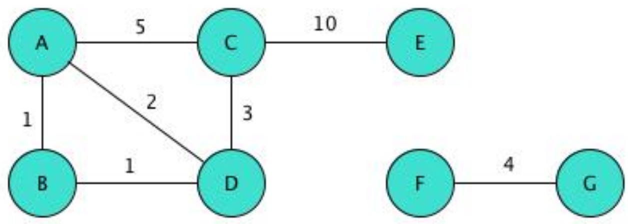
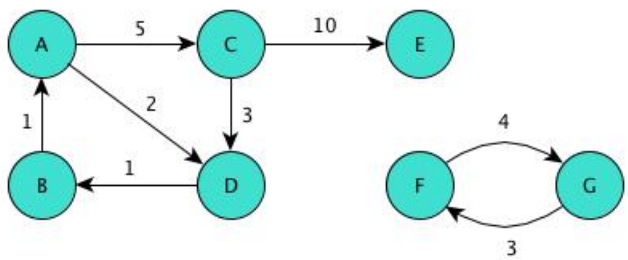
Preuve : réfléchissez

2) Matrice d'adjacence d'un graphe

La matrice d'adjacence pour un graphe non valué est une matrice $n \times n$ de nombres. L'élément $a_{i,j}$ vaut 1 s'il existe un chemin du sommet i vers j (début i, fin j), 0 sinon. Si le graphe est valué, on mettra le poids de l'arête/arc au lieu de 0/1.

Remarque : le graphe n'est pas orienté si et seulement si la matrice est symétrique par rapport à la première diagonale $\left(\Leftrightarrow a_{i,j} = a_{j,i} \text{ pour tous } i \text{ et } j\right)$.

Exemples :

Graphe	Matrice d'adjacence
	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$
	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$
	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ *Le sens de lecture est important*

3) <u>Nombre de chemins de longueur *n* dans un graphe.</u>

Théorème : Dans un graphe G simple, non valué, représenté par sa matrice d'adjacence A, le nombre de chemins de longueur $k > 0$ du sommet numéroté i au sommet numéroté j est donné par le coefficient $a_{i,j}$ dans la matrice A^k.

Démonstration :

C - Applications des matrices

1) <u>Transformations du plan</u>

Pour ce paragraphe, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

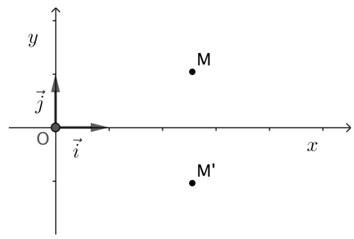
Exemple 1 : on considère la translation de vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, qui à tout point $\mathrm{M}(x;y)$ associe le point $\mathrm{M}'(x',y')$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}=\vec{t}$.

On peut alors définir matriciellement cette transformation par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

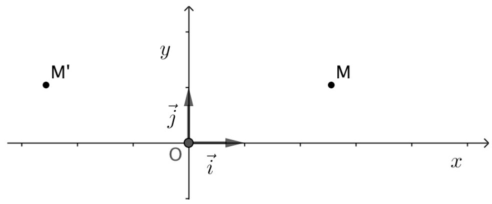
Exemples 2 et plus :

On peut définir pour certaines transformations planes *f*, qui au point $\mathrm{M}(x;y)$ associe le point $\mathrm{M}'(x',y')$, la matrice de transformation associée $\mathrm{T}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

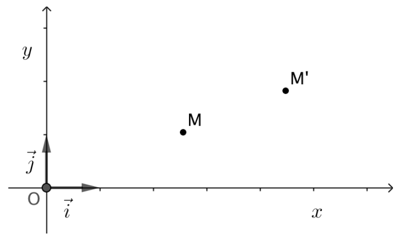
- Symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses : $\mathrm{T}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



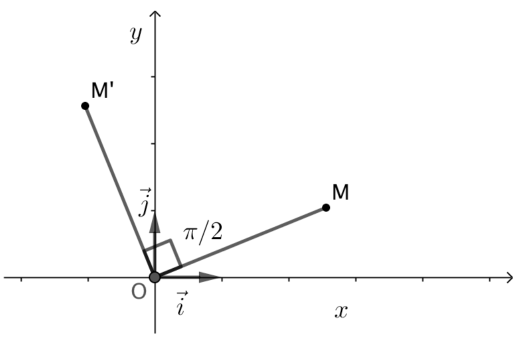
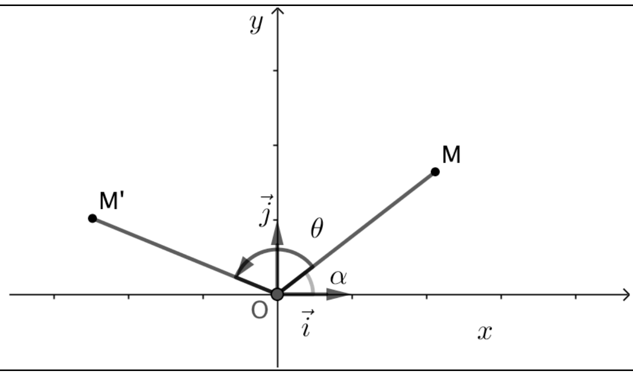
- Symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées : $\mathrm{T}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



- Homothétie de centre O et de rapport k : $\mathrm{T}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



- Rotation de centre O et d'angle θ :

Cas simple : angle $\dfrac{\pi}{2}$	Cas général : angle θ quelconque
	
$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$	$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Pour le cas de la rotation d'un quart de tour dans le sens direct, on peut se rappeler des formules du produit scalaire, constater que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}'}$, et conclure intuitivement.

Pour le cas général, penser aux formules d'addition des angles. Pour simplifier on peut supposer que M est un point sur le cercle trigonométrique, tel que $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \alpha$ puis conclure.

Calculs et détails :

2) Suites de matrices colonnes

Définition : Une suite de matrices de dimensions $n \times p$ est une fonction de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des matrices $n \times p$. On note $\left(\mathrm{U}_n\right)$ ou $\left(\mathrm{U}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les éléments d'une matrice U_n sont les termes de suites numériques.

En particulier, il existe des suites de matrices colonne.

Définition : une suite de matrices converge si et seulement si toutes les suites formant les éléments de ces matrices convergent. La limite de la suite $\left(\mathrm{U}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors la matrice formée des coefficients limites de chacun des termes de U_n.

Exemple : soit $\left(\mathrm{U}_n\right)$ la suite de matrices colonnes définie par $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} 4\times 0{,}5^n \\ -2\times\left(-0{,}2\right)^n \end{pmatrix}$. Cette suite converge, car les éléments de U_n sont des suites géométriques convergentes (de raison appartenant à l'intervalle $\left]-1;1\right[$).

Définition : La suite de matrices $\left(\mathrm{U}_n\right)$ est géométrique si et seulement si il existe une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.

La matrice A s'appelle la raison de la suite.

Théorème : $\left(\mathrm{U}_n\right)$ est géométrique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$.

Démonstration :

- implication par récurrence à rédiger

- réciproque : si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$, alors on a $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}^{n+1}\mathrm{U}_0 = \mathrm{AA}^n\mathrm{U}_0 = \mathrm{AU}_n$.

3) Suites arithmético-géométriques

Définition : La suite de matrices $\left(\mathrm{U}_n\right)$ est arithmético-géométrique si et seulement si il existe une matrice A et une matrice B telles que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{B}$.

Théorème : Soit $\left(\mathrm{U}_n\right)$ une suite arithmético-géométrique de la forme $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n+\mathrm{B}$. S'il existe une matrice C telle que C = AC + B, et si la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge vers A', alors $\left(\mathrm{U}_n\right)$ converge vers $\mathrm{A}'\left(\mathrm{U}_0-\mathrm{C}\right)+\mathrm{C}$.

Preuve : Soit $\left(\mathrm{V}_n\right)$ la suite définie par $\mathrm{V}_n=\mathrm{U}_n-\mathrm{C}$.

$\mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{U}_{n+1}-\mathrm{C}=\left(\mathrm{A}^n\mathrm{C}+\mathrm{B}\right)-\left(\mathrm{AC}+\mathrm{B}\right)=\mathrm{A}\left(\mathrm{U}_n-\mathrm{C}\right)$.

Donc $\left(\mathrm{V}_n\right)$ est géométrique de raison A ; d'où $\mathrm{V}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$.

Si la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge vers A', $\left(\mathrm{V}_n\right)$ converge vers $\mathrm{A}'\mathrm{V}_0$.

Comme $\mathrm{V}_n=\mathrm{U}_n-\mathrm{C}\Leftrightarrow\mathrm{U}_n=\mathrm{V}_n+\mathrm{C}$, $\left(\mathrm{U}_n\right)$ converge vers $\mathrm{A}'\mathrm{V}_0+\mathrm{C}=\mathrm{A}'\left(\mathrm{U}_0-\mathrm{C}\right)+\mathrm{C}$.

Remarques :

- si la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ ne converge pas, la démonstration suivante montre que $\mathrm{U}_n=\mathrm{A}^n\left(\mathrm{U}_0-\mathrm{C}\right)+\mathrm{C}$.
- En pratique, la recherche de C conduit à résoudre l'équation C = AC + B. C est appelé point fixe de la suite $\left(\mathrm{U}_n\right)$.
- $\mathrm{C}=\mathrm{AC}+\mathrm{B}\Leftrightarrow\left(\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)\mathrm{C}=\mathrm{B}\Leftrightarrow\mathrm{C}=\left(\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{B}$ pourvu que I – A soit inversible.
- Si $\mathrm{U}_0=\mathrm{C}$, la suite $\left(\mathrm{U}_n\right)$ est constante et égale à C, donc converge vers C.
- Dans $\mathbb{R}$, une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1}=au_n+b$ converge vers son point fixe $\dfrac{b}{1-a}$ sssi $-1<a<1$.

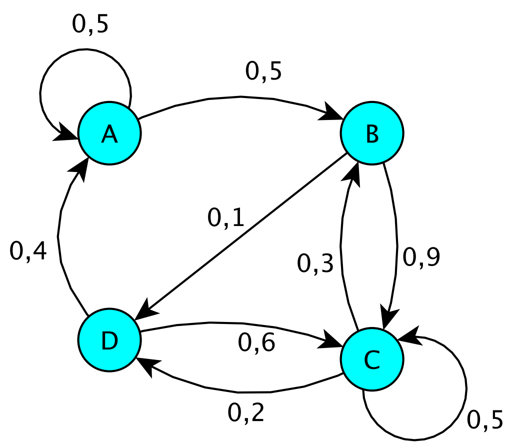
D - Chaines de Markov

1) Graphe probabiliste

Définition : un graphe orienté pondéré est un graphe probabiliste lorsque :

- tous les poids des arcs sont compris entre 0 et 1 ;
- la somme des poids des arcs sortant d'un sommet vaut 1

Exemple :



Les graphes probabilistes sont bien sûr associés à leur matrice de transition ; dans l'exemple précédent :

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Chaîne de Markov à deux ou trois états

On ne donnera pas ici de définition formelle d'une chaîne de Markov.

On modélise l'évolution d'un système possédant deux ou trois états (a, b ou a, b, c), où le passage d'un état à un autre suit une loi de probabilités, par une suite de variables aléatoires (X_n). On suppose que les probabilités de passage d'un état à un autre ne dépendent pas du rang n : les probabilités de passage d'un état à un autre sont fixes[4]. Alors la suite (X_n) est une chaîne de Markov.

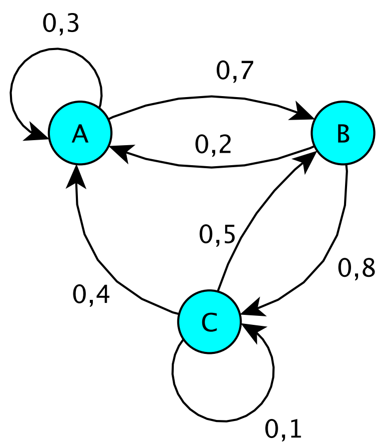
La loi de probabilité X_0 s'appelle la distribution initiale du système, on la note souvent π_0. Cette matrice est une matrice ligne comportant autant de colonnes que d'états, plus précisément elle vaut $\pi_0=\left(P(X_0=a),P(X_0=b),P(X_0=c)\right)$

La loi de probabilité X_n s'appelle la distribution après n transitions, on la note souvent π_n.

On utilise également le terme de marche aléatoire pour définir un tel processus.

Exemple :

Une chaîne de Markov se représente commodément sous la forme d'un graphe probabiliste, et ainsi on y associe sa matrice de transition :



$$P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Remarque importante : $P_{X_n=x_i}\left(X_{n+1}=x_j\right)=a_{i,j}$, c'est-à-dire que la probabilité de passer de l'état x_i à l'état x_j est donnée par le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice P, indépendamment de l'étape n.

Théorème : La probabilité de passer de l'état x_i à l'état x_j en n étapes est égale au coefficient $a_{i,j}$ de la matrice P^n .

Démonstration se fait par récurrence en utilisant la remarque importante ci-dessus.

Méthode/exemple : pour déterminer la probabilité de passer de l'état B à l'état A en quatre étapes, on lit le coefficient $a_{2,1}$ de P^4.

[4] On peut les voir comme indépendantes du temps ; le système « n'a pas de mémoire ».

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,2783 & 0,3465 & 0,3752 \\ 0,3134 & 0,3978 & 0,288 \\ 0,2918 & 0,3681 & 0,3401 \end{pmatrix} \text{ donc } P_{X_1=B}\left(X_4 = A\right) = 0,3134$$

3) Étude asymptotique.

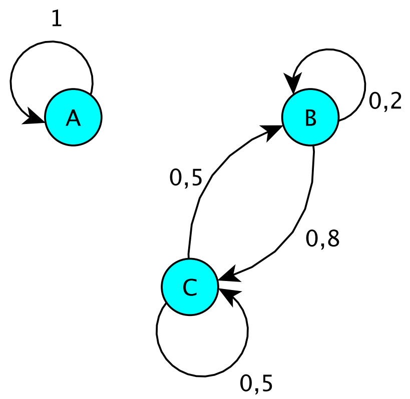
En reprenant l'exemple précédent, on remarque que $P^{20} \simeq \begin{pmatrix} 0,2958 & 0,3728 & 0,3314 \\ 0,2958 & 0,3728 & 0,3314 \\ 0,2958 & 0,3728 & 0,3314 \end{pmatrix}$. Ce qui permet de conjecturer que, indépendamment de la distribution initiale, le système se « stabilise ». Observons ce qui se passe pour une éventuelle distribution asymptotique en fonction de distributions initiales distinctes (i.e. est-ce que $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$ existe, et de plus indépendamment de π_0 ?).

Ainsi, pour un état de départ en A, avec $P\left(X_0 = \mathrm{A}\right) = 1, P\left(X_0 = \mathrm{B}\right) = 0, P\left(X_0 = \mathrm{C}\right) = 0$, soit $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\pi_{20} \simeq \pi_0 P_{20} \simeq \begin{pmatrix} 0,2958 & 0,3728 & 0,3314 \end{pmatrix}$.

Et pour $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$, on trouve $\pi_{20} \simeq \pi_0 P_{20} \simeq \begin{pmatrix} 0,2958 & 0,3728 & 0,3314 \end{pmatrix}$

On conjecture que dans cet exemple il existe une de distribution limite : quel que soit la distribution initiale, il semble que $P\left(X_{+\infty} = \mathrm{A}\right) \simeq 0,2958; P\left(X_{+\infty} = \mathrm{B}\right) \simeq 0,3728; P\left(X_{+\infty} = \mathrm{C}\right) \simeq 0,3314$ [5]

Examinons un deuxième exemple :



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Pour $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\pi_{20} = \pi_0 P^{20} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\pi_{20} = \pi_0 P^{20} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0,3846 & 0,6154 \end{pmatrix}$

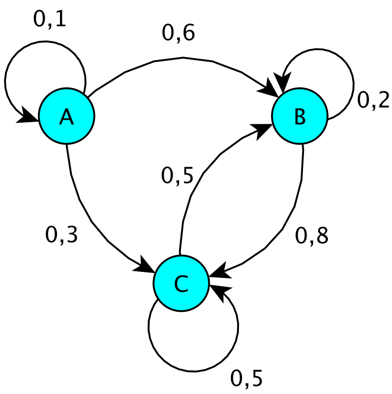
On peut donc conjecturer qu'il n'existe pas de distribution limite. En observant le graphique, en conjecturer, puis démontrer, une propriété de la matrice P^n pour tout n entier naturel non nul. Montrer alors que pour les distributions initiales $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\pi'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la probabilité $P\left(X_n = \mathrm{A}\right)$ que le système se trouve à l'état A est distincte pour toutes les valeurs de n entier naturel non nul. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$ n'existe pas.

[5] La notation $P\left(X_{+\infty} = \ldots\right)$ n'est pas une notation officielle, on l'utilise ici pour des raisons de commodité.

Théorème : soit une chaîne de Markov de matrice de transition *P*. S'il existe un entier naturel n tel que la matrice P^n ne contienne pas de zéro, alors la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice vérifiant $\pi P = \pi$, et cette limite ne dépend pas de l'état initial π_0.
La matrice π est appelée distribution invariante de la chaîne de Markov, dite alors dans un état stationnaire. La distribution invariante est unique.

Remarques :

- Lorsque la matrice P^n ne contienne pas de zéro, alors on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre (y compris lui-même) en n étapes.
- Ce théorème donne une condition suffisante mais non nécessaire ; réfléchir au cas de la chaîne de Markov suivante, notamment à la forme de la matrice P^n :



$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

On pourra conjecturer le comportement de la chaîne en $+\infty$ avec notamment les deux états initiaux $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que pour tout n entier naturel non nul, la matrice P^n comporte au moins un zéro, et pourtant qu'il existe un état stationnaire.