Exercices complementaires Matrices

Exercice 1.

Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit la figure composée :

- du carré *OIJK* avec $I\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- surmonté du triangle *KJL* avec $L\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Soit la matrice $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées des points O',I',J',K' et L' définis par $O'=D\cdot O$, $I'=D\cdot I$, $J'=D\cdot J$, $K'=D\cdot K$, $L'=D\cdot L$
2. Faire une figure.

Remarque : D est une matrice qui représente une transformation, ici une dilatation de vecteur $\vec{j}$ et de rapport 3.

Exercice 2.

Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit la figure composée :

- du carré *OIJK* avec $I\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- surmonté du triangle *KJL* avec $L\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Soit la matrice $T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées des points O',I',J',K' et L' définis par $O'=T\cdot O$, $I'=T\cdot I$, $J'=T\cdot J$, $K'=T\cdot K$, $L'=D\cdot L$
2. Faire une figure.

Remarque : *T* est une matrice qui représente une transformation, ici une transvection de vecteur $\vec{i}$ et de rapport 2.

Pour info : On appelle transvection du plan une transformation admettant une droite de points invariants et telle que toute droite joignant un point en dehors de cette droite et son image est parallèle à cette droite.

Exercice 3.

Dans les exercices 1 et 2, un point a une image unique par *D* ou *T*.

Les matrices des deux exercices précédents sont-elles inversibles ? Que cela signifie-t-il en termes d'image ou d'antécédent ?

Remarque : On dit que ces transformations sont des applications linéaires du plan. Plus généralement, une fonction *f* d'un ensemble A dans un ensemble B est une :

- surjection lorsque tout élément de B admet au moins un antécédent dans A ;
- injection lorsque tout élément de B admet au plus un antécédent dans A ;
- bijection lorsque *f* est à la fois une injection et une surjection, c'est-à-dire que tout élément de B admet exactement un antécédent dans A par *f*.

Exercice 4.

Déterminer la matrice associée à :

- la projection orthogonale sur l'axe des abscisses. Est-ce une application linéaire ?

- la projection orthogonale sur l'axe des ordonnées. Est-ce une application linéaire ?
- la projection sur la première bissectrice Δ. Est-ce une application linéaire ?

Pour ce dernier exercice, on note $M(x,y)$ le point à projeter et $M'(x',y')$ son projeté.

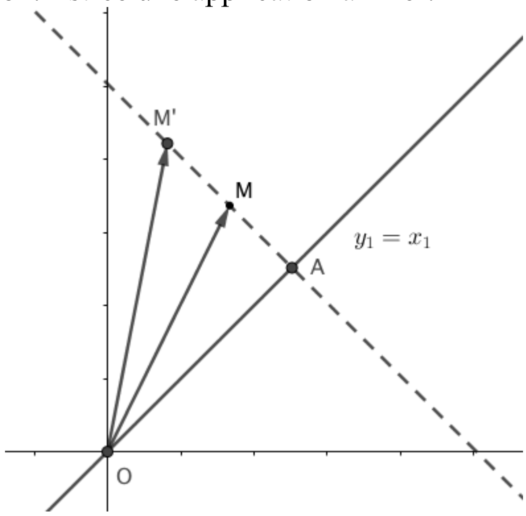
1. Faire un schéma et donner une équation de la première bissectrice en fonction de x' et y' (pour des raisons de commodité, puisque le point M' est sur cette droite).
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ. Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$?
3. En déduire un système permettant de calculer x' et y' en fonction de x et y, puis la matrice demandée.

- Généraliser à la projection orthogonale sur une droite d'équation $ax'+by'=0$.

Exercice 5.

On pourra utiliser intelligemment les résultats de l'exercice précédent.

Dans la dilatation d'axe la première bissectrice Δ, d'équation $y_1 = x_1$, et de rapport 2, le point M' image de M est obtenu par $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AM}$, où A est le projeté orthogonal de M sur Δ.
Donner la matrice de cette dilatation. Est-ce une application affine ?



Généraliser à la dilatation sur une droite d'équation $ax'+by'=0$ et de rapport k.

Exercice 6.

Soit $r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$ (ou r plus simplement) la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit R sa matrice associée.

Soit $h_{(O;4)}$ (ou h plus simplement) l'homothétie de centre O et de rapport 4, et soit H sa matrice associée.

A tout point M du plan on associe les points M' et M'' images respectives de M par $r\circ h$ et $h\circ r$. Calculer les coordonnées de M' et M''.

Que conjecturez-vous ? Démontrer la conjecture par un calcul matriciel faisant intervenir uniquement les matrices R et H.

Remarque : l'application linéaire $r\circ h$ est appelée similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$, et de rapport 4.

Exercice 7.

1. Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre. Montrer que AB est inversible en exprimant son inverse.
2. Soit M une matrice carrée telle que $M^3+2M^2=I$. Montrer que M est inversible et calculer son inverse en fonction de M.
3. Même question que le 2. avec $M^3-3M^2+2M=I$.

Exercice 8.

1. Soient $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $AX=B$.
2. Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $XA+B=C$.

Exercice 9.

Un exercice préparatoire pour l'étude des suites de matrices. On donne une matrice diagonale $D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10.

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.

Soit $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

2.
   a/ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b/ Démontrer que la matrice $D=P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   c/ Démontrer que $A=PDP^{-1}$.
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$, et vérifier qu'elle est cohérente avec les résultats du 1.

Exercice 11.

Soient $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la suite de matrices colonnes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $U_{n+1}=AU_n+B$ et $U_0=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice C telle que $C=AC+B$.
2.
   a/ Soit $F=\frac{1}{2}A$. Déterminer la matrice N telle que $F=I_2+N$.
   b/ Calculer N^2, puis F^2 et F^3 en fonction de I_2 et N.
   c/ En déduire F^n puis A^n en fonction de n.
3. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?