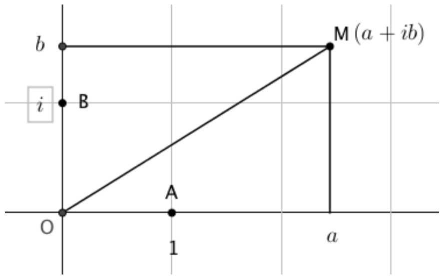
NOMBRES COMPLEXES.

I FORME ALGEBRIQUE

1. Les points du plan et les nombres complexes.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.
Au point A(1 ; 0) on associe le nombre 1, au point B(0 ; 1) on associe le nombre *i* tel que $i^2=-1$.
À tout point M(a ; b) on associe son affixe $z=a+ib$. Réciproquement M est l'image de *z*.
Remarque : *i* est un nombre comme les autres… Il faudra s'habituer à le considérer comme $\sqrt{2}$ ou π.



Théorème : Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $z=a+ib$, où *a* et *b* sont des réels quelconque, et *i* vérifie $i^2=-1$.
Alors :

- $\mathbb{C}$ existe, et *i* aussi. Les nombres de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes
- L'écriture $z=a+ib$ est unique. Elle est appelée forme algébrique de *z*.
- On peut munir $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$.

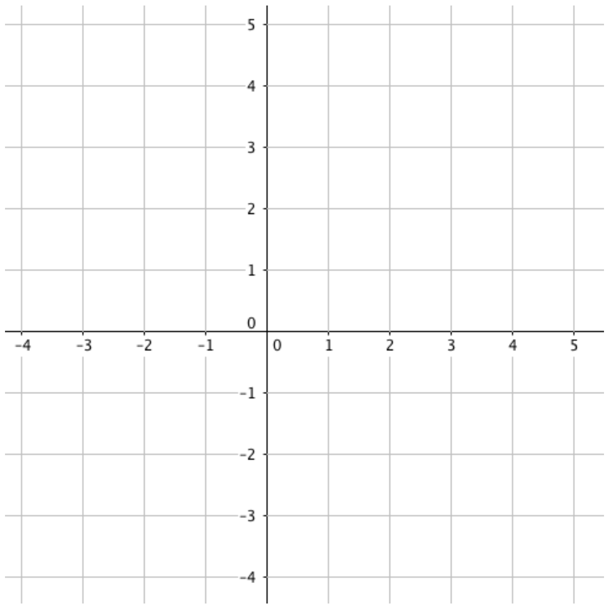
Conséquence : deux complexes $z=a+ib$ et $z=a'+ib'$ sont égaux si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$.

Exercice : dans le repère ci-contre, placer les points d'affixe donnés :

$\mathrm{M}(3+2i)$ $\qquad$ $\mathrm{N}(-2+i)$

$\mathrm{P}(-4i)$ $\qquad$ $\mathrm{Q}(5)$

$\mathrm{R}(4-3i)$ $\qquad$ $\mathrm{S}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$



Définition : Soit *z* un nombre complexe, donné sous la forme $z=a+ib$. On appelle *a* la partie réelle de *z*, *b* la partie imaginaire de *z*. On note $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$.
Remarque : dans la partie imaginaire, il n'y a pas le « *i* ». La partie imaginaire de *z* est donc un nombre réel !

Remarques/définitions complémentaires :

- On note souvent $z=x+iy$, pour rappeler l'usage des coordonnées. Il n'y a pas de préférence pour une notation ou l'autre.
- Un complexe $z=a+ib$ est réel si et seulement si $b=0$; c'est à dire que $z=a$.
- Un complexe $z=a+ib$ est imaginaire pur si et seulement si $a=0$; c'est à dire que $z=ib$.
- L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{u}$ est l'affixe du point M.

Que changent les complexes par rapport aux réels ?

- On gagne le fait qu'une équation de degré *n* ait toujours *n* solutions (certaines pouvant être présentes plusieurs fois). Plus précisément, on dit qu'un polynôme de degré *n* a toujours *n* racines dans $\mathbb{C}$. La démonstration dépasse amplement le niveau de terminale, on se contentera du second degré (cf. ci-après, § II)

- On perd l'ordre. Pour rappel, deux nombres réels peuvent toujours être ordonnés (il y a le plus grand et le plus petit). Pour montrer que l'ordre dans $\mathbb{C}$ n'existe pas, il suffit de trouver deux éléments non ordonnables. On va montrer que le nombre *i*, qui n'est pas nul, n'est ni positif ni négatif, c'est à dire qu'on n'a pas $i>0$ ou $i<0$.
  Démonstration par l'absurde :
  Pour démontrer une propriété par l'absurde, on suppose que son contraire est vrai, et on montre qu'on arrive à une contradiction. On suppose donc qu'on a $i>0$ ou $i<0$.
  - Supposons que $i>0$
    Alors $i>0 \Rightarrow i^2>0^2 \Rightarrow -1>0$ car $i^2=-1$
    Or -1 > 0 est problématique…donc *i* n'est pas positif
  - Puisque *i* n'est pas positif, alors $i<0$ d'après notre hypothèse.
    Alors $i<0 \Rightarrow i^2>0^2 \Rightarrow -1>0$ (on inverse l'ordre pour le passage au carré des négatifs).
    Absurde.
  - L'hypothèse « $i>0$ ou $i<0$ » emmène donc à une contradiction, on en déduit que *i* et 0 ne sont pas ordonnables.

2. Opérations

a/ *Point de vue algébrique*

→ regarder le film « Dimensions chapitre 5 » à l'adresse suivante : https://www.youtube.com/watch?v=BosTQT4smJA (ou googler dimension chapitre 5 français). Vous pouvez sauter le début et commencer à 1mn30. Finir à 9mn39 (pour ce qui concerne ce paragraphe), ou bien à 11mn45 (paragraphe « forme trigonométrique » ci-après. La suite, qui ne concerne pas le programme de terminale, est très surprenante, elle est plus facile à comprendre si vous suivez le documentaire dans l'ordre (en commençant par le chapitre 1… ☺).
Même si le rythme vous paraît lent, le raisonnement exposé est fin.

- *Notamment bien comprendre pourquoi, avec un raisonnement géométrique et non calculatoire, le narrateur dit « il n'y a donc aucun nombre qui, multiplié par lui-même, donne -1 » (3 mn 59).*
- *Point important à 7mn17 (multiplication par i)*

Toutes les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ sont valables dans $\mathbb{C}$.
En particulier : somme et produit, identités remarquables, règle du produit nul.

Exemple : disposition rapide du calcul pour le produit
Pour limiter les erreurs de calcul pendant la distribution lors d'une multiplication, il est plus efficace de changer ses habitudes comme suit :

$$(3+2i)(-5+4i)=\underbrace{\overbrace{3\times-5+2i\times4i}^{\text{flèches}}}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{\overbrace{(3\times4+2\times-5)}^{\text{flèches}}}_{\text{partie imaginaire}}=-23+2i$$

On a d'abord calculé tout ce qui donne un résultat réel (flèches rouges du dessus). On peut même dans un second temps ne plus du tout écrire les « *i* », sachant qu'on a un $i^2=-1$. Puis on met un « *i* » en facteur, et on calcule la partie imaginaire (flèches bleues du dessous).

Inverse : Pour $z\neq0$ on a $\frac{1}{z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ (ne pas retenir, on verra plus loin une forme plus compacte)

Exemple : calcul d'un inverse sous forme algébrique.

$$\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{3+4i}{3^2+4^2}=\frac{3+4i}{25}$$

Dans le calcul précédent, constater que :

- Pour supprimer les « *i* » au dénominateur, on a multiplié par une fraction égale à 1, où dénominateur et numérateur sont deux complexes égaux. Ce complexe a la même partie réelle que le dénominateur d'origine, pour la partie imaginaire le signe est inversé. Ce nombre est appelé conjugué (cf. ci-dessous)

- On a appliqué l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Ici on a $(3-4i)(3+4i)=3^2-(4i)^2=3^2-4^2i^2=3^2+4^2$ car $i^2=-1$.
- On peut retenir une nouvelle identité remarquable $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$
- On obtient bien la forme algébrique du nombre : $\dfrac{1}{3-4i}=\dfrac{3+4i}{25}=\dfrac{3}{25}+i\dfrac{4}{25}=a+ib$

À faire en suivant la même méthode : $\dfrac{1-i}{1+i}=$

Remarque pour la culture mathématique :

- l'addition dans $\mathbb{C}$ est commutative $z+z'=z'+z$, associative $z+(z'+z'')=(z+z')+z''$, admet un élément neutre 0 $z+0=0+z=z$, et tout élément admet un opposé : on dit que $(\mathbb{C},+)$ est un groupe commutatif.
- De même, la multiplication dans $\mathbb{C}_*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ est commutative, associative, admet un élément neutre 1, et tout élément admet un opposé (appelé inverse dans le cas du produit) : on dit que $(\mathbb{C}_*,\times)$ est un groupe commutatif. Remarquez que la division n'est pas associative.
- De plus le produit est distributif par rapport à l'addition : toutes ces propriétés font que $(\mathbb{C},+,\times)$ est « un corps commutatif ».

Théorème : Pour tous complexes *u* et *v*, et pour tout entier *n*, on a :

$$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k \qquad \text{Formule du binôme de Newton}$$

Démonstration : par récurrence

- Initialisation : pour $n=0$ on a $(u+v)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k=\binom{0}{0}u^0v^0=1\times1\times1=1$.

  L'égalité est vérifiée.
- Hérédité : supposons que pour un entier naturel *n* fixé, on a $(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k$ (hypothèse de récurrence). Montrons alors que $(u+v)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{n+1-k}v^k$.

$$(u+v)^{n+1}=(u+v)(u+v)^n$$

$$=(u+v)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^{k+1} \qquad \text{en distribuant (attention aux exposants)}$$

$\rightarrow$ On va « décaler » l'indice *k* dans la deuxième somme, pour pourvoir ajouter deux termes de mêmes puissances en *u* et *v*. Si à *k* on ajoute 1, alors lorsque l'on soustrait *k* dans u^{n-k}, il faut ajouter 1 pour compenser. Et v^{k+1} devient v^k.

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}u^{n+1-k}v^k$$

$\rightarrow$ On factorise, reste le premier et le dernier terme qui ne sont pas en commun

$$=\binom{n}{0}u^{n+1}v^0+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)u^{n+1-k}v^k+\binom{n}{n}u^0v^{n+1}$$

$\rightarrow$ On utilise les propriétés sur les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}\quad(=1)\qquad\qquad\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}\quad(=1)$$

$$=\binom{n+1}{0}u^{n+1}v^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^{n+1-k}v^k+\binom{n+1}{n+1}u^0v^{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{n+1-k}v^k \qquad \text{…ouf !}$$

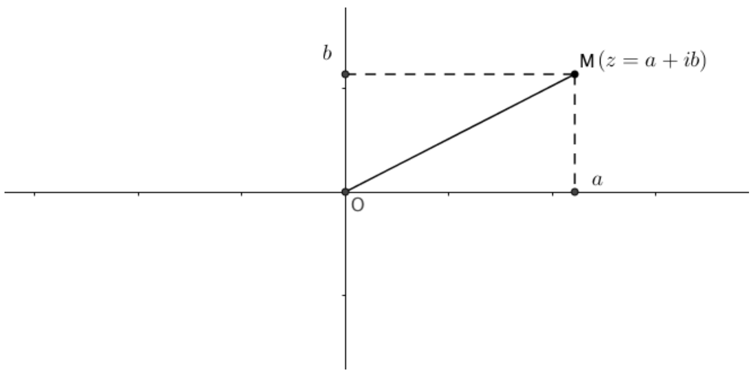
L'égalité est vraie au rang $n+1$

- Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré d'après l'axiome de récurrence l'égalité $\forall n\in\mathbb{N}\quad (u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k$ ■

3. <u>Conjugué d'un nombre complexe.</u>

Définition : le conjugué du complexe $z=a+ib$ est le complexe $\overline{z}=a-ib$.

Symétries : Compléter le schéma ci-dessous, avec les points $\mathrm{M}_1(\overline{z})$, $\mathrm{M}_2(-z)$ et $\mathrm{M}_3(-\overline{z})$.



Propriétés : la conjugaison est compatible avec les opérations usuelles (on dit que c'est un morphisme de corps…). Pour tous complexes z et z', et pour tout entier naturel n on a :

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ $\qquad\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$ $\qquad\overline{z^n}=\overline{z}^n$ $\qquad\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\qquad\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$ $\qquad\overline{-z}=-\overline{z}$

Idempotence : $\overline{\overline{z}}=z$

Démonstrations :

- *Évident (mais à vérifier quand même) pour l'idempotence*

<u>À faire avec la forme algébrique pour :</u>

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{-z}=-\overline{z}$
- $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$

- Démontrons $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$: $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\dfrac{1}{z'}\right)}\overset{(1)}{=}\overline{z}\times\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}\overset{(2)}{=}\overline{z}\times\dfrac{1}{\overline{z'}}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

  On a utilisé pour (1) : $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$ et pour (2) : $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$; le principe étant d'utiliser au maximum les preuves précédentes, pour faire un minimum de calculs.
- Démontrons par récurrence que $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
  - Initialisation : pour $n=0$ on a $\overline{z^0}=\overline{1^0}=\overline{1}=1=\left(\overline{z}\right)^0$
  - Hérédité : supposons que pour un entier naturel *n* fixé, on a $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ (hypothèse de récurrence). Montrons alors que $\overline{z^{n+1}}=\overline{z}^{n+1}$.

    $$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}}&=\overline{z^n\times z}\\&=\overline{z^n}\times\overline{z}\quad\text{d'après}\quad\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}\\&=\overline{z}^n\times\overline{z}\quad\text{d'après l'hypothèse de récurrence}\quad\overline{z^n}=\overline{z}^n\\&=\overline{z}^{n+1}\quad CQFD\end{aligned}$$

    La propriété est vraie au rang $n+1$
  - Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré d'après l'axiome de récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}\quad\overline{z^n}=\overline{z}^n$

Méthodes / propriétés :
- z réel $\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow z=\overline{z}$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow z=-\overline{z}$

Démonstration (à faire proprement pour l'une des deux, plus rapidement pour l'autre) :

II Equations polynomiales dans C

1. Quelques définitions.

Définitions :
- Soient $a_0,a_1,\ldots,a_n$ des réels, où $a_n\neq 0$. On appelle fonction polynôme, ou polynôme, *P* définie sur $\mathbb{C}$ la fonction $z\mapsto a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$.
- Le polynôme nul est la fonction définie pour tout complexe *z* par $P(z)=0$.
- Si *P* n'est pas le polynôme nul, *n* est le degré de *P*. Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants.
- Une racine z_0 est un nombre complexe tel que $P(z_0)=0$.

Remarques :

- on peut aussi définir des polynômes à coefficients complexes, ainsi que des polynômes définis sur $\mathbb{R}$.
- Le polynôme nul n'a pas de degré (mais cf. ci-après)

Culture mathématique :
- Plus formellement, un polynôme à une indéterminée *X*, a coefficients complexes (ou réels), est une suite finie d'éléments de $\mathbb{C}$: $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. Le polynôme est exprimé comme suit : $A = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, où d est le degré du polynôme (non nul). On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Par convention le degré du polynôme nul est $-\infty$.
- En terminale, on identifie polynôme et fonction polynôme, alors que l'on peut voir, sur un exemple dans le chapitre sur les congruences, que ces deux notions sont différentes.

Théorème (admis) : une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Remarque : contrairement à ce que l'on pourrait croire, la preuve de ce théorème n'est pas simple, on pourra l'approcher avec les résultats des paragraphes suivants.

2. Le théorème fondamental de l'algèbre et ses conséquences (culture mathématique)

Théorème : Tout polynôme à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Remarques :
- Appelé aussi théorème de d'Alembert-Gauss, ce théorème n'a pas grand chose à voir avec l'algèbre. A l'époque, l'algèbre était principalement la théorie des équations, d'où le nom.
- On dit que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{R}$)

3. Équation du second degré à coefficients réels

Lemme : l'équation du second degré $z^2 = a$, où $a \in \mathbb{R}$, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.
  - Si $a \geq 0$, les solutions sont $z = \sqrt{a}$ et $z = -\sqrt{a}$.
  - Si $a < 0$, les solutions sont $z = i\sqrt{-a}$ et $z = -i\sqrt{-a}$.

Remarque :
- Si $a = 0$, les deux solutions sont confondues.
- Il est équivalent de dire que le polynôme $P(z) = z^2 - a$ admet deux racines, éventuellement confondues, dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : on factorise $P(z) = z^2 - a$ avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Si $a \geq 0$, on le fait directement, sinon on écrit $P(z) = z^2 + a = z^2 - \left(i\sqrt{-a}\right)^2$

Théorème : l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où *a*, *b* et *c* sont des réels quelconques ($a \neq 0$), admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$ (éventuellement deux fois la même).
Si $\Delta \geq 0$, les solution sont données par le théorème de première.
Si $\Delta < 0$, les solutions sont les deux nombres complexes conjugués : $z_{1-2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration rapide : il suffit de reprendre la démonstration de 1[ère].

On trouve la forme canonique : $az^2 + bz + c = a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, on factorise comme en première et on obtient les solutions réelles.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$ (remarquez que $-\Delta > 0$). On factorise de manière semblable au cas $\Delta \geq 0$, d'où $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ CQFD.

4. Factorisation des polynômes

Théorème : Soient z et a deux nombres complexes, soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k \; .$$

Démonstration (à compléter) : on part du second membre,

$$(z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k = (z-a)\left(z^{n-1} + z^{n-2}a^1 + z^{n-3}a^2 + \ldots + z^2 a^{n-3} + z^1 a^{n-2} + a^{n-1}\right)$$

On développe, puis on simplifie :

Théorème : Soit a un nombre complexe, et P un polynôme de degré n supérieur ou égal à 1.

Si $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q de degré vérifiant $\text{degré}(Q) = \text{degré}(P) - 1$, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$

Démonstration :

Puisque le degré n de P est supérieur ou égal à 1, on peut écrire $P(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p$.

Comme $P(a) = 0$, alors :

$$P(z) = P(z) - 0 = P(z) - P(a)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p z^p - \sum_{p=0}^{n} a_p a^p$$ Puis on factorise chaque terme par a_p :

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p \boxed{\left(z^p - a^p\right)}$$ On utilise le théorème précédent, en remplaçant n par p :

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p \boxed{(z-a)\sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k} a^k}$$ on « sort » le facteur commun $(z-a)$

$$= (z-a)\sum_{p=0}^{n} a_p \left(z^{p-1} + z^{p-2}a^1 + \ldots + z^1 a^{p-2} + a^{p-1}\right)$$

$$= (z-a)Q(z)$$ ■

La démonstration du théorème précédent donne une méthode constructive pour trouver la factorisation, mais la formule est assez indigeste. Il est plus facile de procéder avec différentes méthodes.

Méthode de factorisation 0 : cf. exercices, où souvent on demande de développer et de retrouver avec un système les coefficients de Q.

Méthode de factorisation 1 : c'est en fait la méthode proposée dans de nombreux exercices, mais en version « calcul mental ».

Soit $P(z)=2z^3+3z^2-6z+1$.

La somme des coefficients vaut 0, donc $z=1$ est racine. On sait que le polynôme Q est de degré 3 – 1 = 2. Donc $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$.

On développe de tête, petit à petit, et on identifie les termes de même degré :

$z\times az^2=2z^3$	donc $a=2$;
$-1\times 2z^2+z\times bz=3z^2$	donc $b=5$:
$-1\times 5z+z\times c=-6z$	donc $c=-1$;
$-1\times c=-1\times -1=1$	on vérifie que « ça marche » sur le dernier terme.

Donc $P(z)=(z-1)(2z^2+5z-1)$

Méthode de factorisation 2 : (facultative, un peu plus abstraite, mais rapide): division de polynômes

On effectue une division comme en primaire.

On considère le polynôme $P(z)=z^4+3z^3+12z^2+6z-4$. Il est évident que –1 est racine, vous l'avez vu tout de suite bien sûr. On divise $z^4+3z^3+12z^2+6z-4$ par $z+1$, l'idée étant de supprimer à chaque fois le terme de plus haut degré.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & z^4 & +3z^3 & +12z^2 & +6z & -4 & z+1 \\
 & -z^4 & -z^3 & & & (1b) & \\
\hline
 & & 2z^3 & +12z^2 & +6z & -4 & z^3+2z^2+10z-4 \\
 & & -2z^3 & -2z^2 & & (2b) & (1a)(2a)\ (3a)\ (4a) \\
\hline
 & & & 10z^2 & +6z & -4 & \\
 & & & -10z^2 & -10z & (3b) & \\
\hline
 & & & & -4z & -4 & \\
(4b) & & & & +4z & +4 & \\
\hline
(5) & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Etapes :

(1a puis b) le quotient est z^3, pour avoir $z\times z^3=z^4$. On soustrait ensuite $z^3(z+1)$

(2a puis b) le quotient est $2z^2$, pour avoir $z\times 2z^2=2z^3$. On soustrait ensuite $2z^2(z+1)$

(3a puis b) le quotient est $10z$, pour avoir $z\times 10z=10z^2$. On soustrait ensuite $10z(z+1)$

(4a puis b) le quotient est -4, pour avoir $z\times -4=-4z$. On soustrait ensuite $-4(z+1)$

(5) On vérifie que le reste est 0

Théorème : un polynôme P non nul, de degré n, $n\in\mathbb{N}$, admet au plus n racines.

Démonstration :

Par récurrence.

- Initialisation : un polynôme de degré 0 est un polynôme constant. Il n'admet pas de racines, la propriété est vérifiée pour $n=0$.
- Hérédité : On suppose que la propriété est vraie à un rang n fixé (hypothèse de récurrence)

  Soit P un polynôme de degré $n+1$.

  Si P n'a pas de racine, alors il a 0 racines, et $0<n+1$, donc la propriété est vraie au rang n + 1.

  Sinon, P admet au moins une racine a. D'après le théorème précédent, on peut écrire : $P(z)=(z-a)q(z)$, où le degré de Q est égal au degré de P – 1.

  Donc degré(Q) = n.

D'après l'hypothèse de récurrence Q admet au plus n racines.
P admet une racine de plus que Q, soit au plus $n + 1$ racines : la propriété est vraie au rang $n + 1$

- Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Remarques :

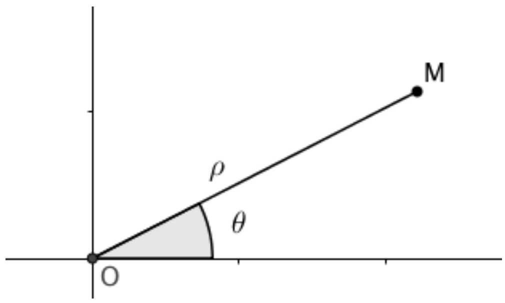
- le théorème fondamental de l'algèbre montre qu'en fait un polynôme de degré n admet exactement n racines, éventuellement confondues. On dit aussi qu'un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 sur $\mathbb{C}$ est scindé, c'est-à-dire qu'il se factorise en produit de polynômes de degré 1.
- Idée de la preuve du théorème « une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls » :
  - le polynôme nul vérifie $P(z)=0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. P a donc une infinité de racines
  - On utilise la contraposée du théorème précédent.
    Qu'est-ce que la contraposée[1] ?
    Un théorème s'écrit :
    Hypothèse $\Rightarrow$ Conclusion.
    La contraposée est le théorème :
    Contraire de la conclusion $\Rightarrow$ Contraire de l'hypothèse
  - Ici le théorème est : non nul de degré $n \Rightarrow n$ racines au plus
  - La contraposée est donc : plus de n racines $\Rightarrow$ polynôme nul. CQFD

III FORME TRIGONOMETRIQUE

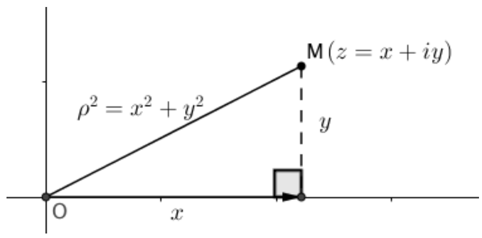
1. Interprétation des nombres complexes en géométrie
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$, et A, B et I trois points d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C}. On a alors :
   - L'affixe du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$: $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
   - L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \quad \left(= z_{\overrightarrow{\mathrm{AO}}} + z_{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}\right)$
   - L'affixe de I milieu de [AB] : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Pour la suite, si vous ne l'avez pas encore fait, regardez Dimensions 5 de 9mn39 à 11mn45.

2. Module et argument
Plutôt que de repérer un point M dans le plan avec les deux coordonnées x et y, on peut utiliser la distance OM notée r ou ρ, et une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$, notée θ, (qui n'existe que pour M $\neq$ O).



Définition : soit $z \neq 0$ un complexe, M le point d'affixe z.
La longueur $OM = r = \rho$ est appelée module de z, et est notée $|z|$.
D'où : $|z| = r = \rho$
Une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \theta$ est appelée *un* argument de z, noté $\arg z$ (on rappelle qu'un angle admet une infinité de mesures).
On écrit $\arg z = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ (se lit « un argument de z est congru à θ modulo 2π », notation que l'on retrouvera dans la partie arithmétique)



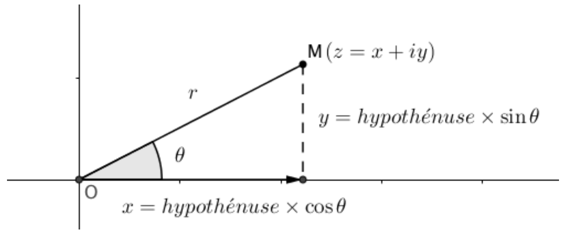
Liens entre forme algébrique et forme trigonométrique :
Pour tout nombre complexe z non nul on a :

[1] On verra ça plus en détail lorsque l'on fera un peu de logique

$r = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$; $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

D'où : $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

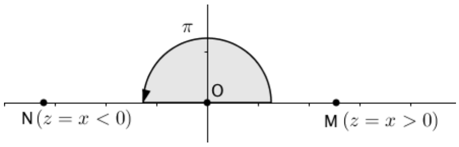


Propriétés immédiates :

- $|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z}$ (détailler le calcul si nécessaire)
- Si $z = x \in \mathbb{R}$, alors la notation est cohérente : module de $z = |z| = |x| =$ valeur absolue de x

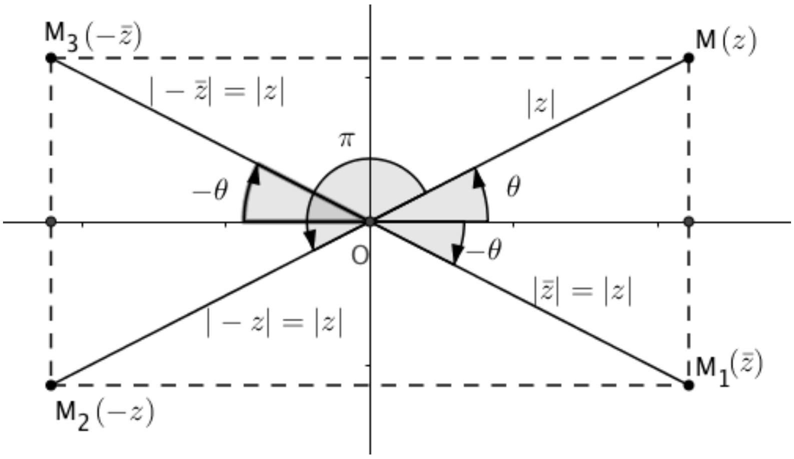
  De plus si $x > 0$ $\arg x = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  Si $x < 0$ $\arg x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg\overline{z} \equiv -\arg z[2\pi]$
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$

Le schéma suivant est important, il résume les propriétés précédentes ; il permet aussi de voir ce qui se passe pour $-\overline{z}$.



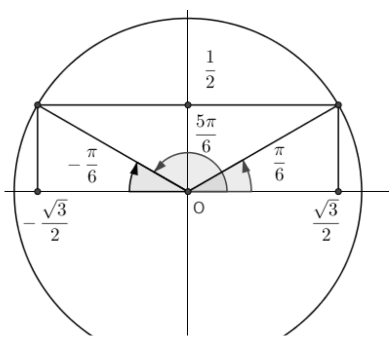
- On peut retenir la formule suivante pour le calcul de l'inverse d'un complexe, mais ce n'est pas obligatoire : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\left(= \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}\right)$

3. Forme trigonométrique

Définition : pour $z \neq 0$, l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique de z, où $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Rappel : vous connaissez bien sûr par coeur les lignes trigonométriques usuelles (et ce depuis la seconde ☺)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Vous vous rappelez également comment trouver, à partir d'un schéma, du tableau ci-dessus, et des propriétés de symétries, les lignes trigonométriques de, par exemple, $\frac{5\pi}{6}$. On trouve ici $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemples : donner la forme trigonométrique de :

2

-5

$2i$

$-i$

$1 + i$

$-1 + i$

$2 + i$

4. Opérations

Lemme :

Soient z et z' deux complexes non nuls, avec $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$zz' = rr'\left(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right)$

$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')\right)$

Démonstrations :

- $zz' = r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

  $= rr'\left[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta)\right]$ on distribue comme vu en I-2-a (opérations : point de vue algébrique), en calculant d'abord la partie réelle, où l'on tient compte de $i^2 = -1$. Puis on met « i » en facteur et on calcule la partie imaginaire.
  On utilise ensuite les formules sur le cosinus et le sinus d'une somme :
  $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.
  On obtient bien : $zz' = rr'\left(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right)$
  Remarque : on peut retenir les formules trigonométriques sous cette forme :
  C+ = CC – SS et S+ = SC + CS
  Ce qui permet de trouver C– = CC + SS et S– = SC – CS car $\cos(-a) = \cos a$ et $\sin(-a) = \sin a$.

- Pour le quotient, avec $\frac{1}{z'} = \frac{\overline{z'}}{|z'|^2} = \frac{r'\left(\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')\right)}{r'^2} = \frac{1}{r'}\left(\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')\right)$ (1) et $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, on peut appliquer la formule que l'on vient de démontrer sur le produit, en remplaçant r' par $\frac{1}{r'}$ et θ' par $-\theta'$. On en déduit immédiatement $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')\right)$.

- Remarque : pour trouver l'écriture (1) de $\frac{1}{z'}$, on peut utiliser une méthode un peu plus « abstraite » :

On pose $\theta = -\theta'$ et $r = \dfrac{1}{r'}$, d'où $zz' = \dfrac{1}{r'}r'\left(\cos\left(-\theta'+\theta'\right)+i\sin\left(-\theta'+\theta'\right)\right) = 1\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 1$, donc $\dfrac{1}{z'} = z = \dfrac{1}{r'}\left(\cos\left(-\theta'\right)+i\sin\left(-\theta'\right)\right)$. On finit alors la preuve comme ci-dessus.

Corollaire : Soient *z* et *z'* deux complexes non nuls.

Module	Argument
$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	$\arg zz' \equiv \arg z + \arg z'\left[2\pi\right]$
$\left\lvert\dfrac{1}{z'}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\dfrac{1}{z'} \equiv -\arg z'\left[2\pi\right]$
$\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\dfrac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'\left[2\pi\right]$
$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg z^n \equiv n\times\arg z\left[2\pi\right]$

Démonstrations :

- $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$ et $\arg zz' \equiv \arg z + \arg z'\left[2\pi\right]$ sont la traduction directe de $zz' = rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin\left(\theta+\theta'\right)\right)$.
- $\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ et $\arg\dfrac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'\left[2\pi\right]$ sont la traduction directe de $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\left(\cos\left(\theta-\theta'\right)+i\sin\left(\theta-\theta'\right)\right)$.
- $\left\lvert\dfrac{1}{z'}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z'\rvert}$ et $\arg\dfrac{1}{z'} \equiv -\arg z'\left[2\pi\right]$ sont obtenues à partir des propriétés sur le quotient, en posant dans la ligne précédente $z=1$ (d'où $\lvert z\rvert = 1$ et $\arg z = 0\left[2\pi\right]$)
- $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$ et $\arg z^n \equiv n\times\arg z\left[2\pi\right]$ se démontrent par récurrence à partir de la première propriété. Faites au moins une de ces démonstrations proprement, vous pouvez vous baser sur la preuve des puissances du conjugué.

A retenir :

- le module est compatible avec le produit, le quotient et les puissances.
- L'argument transforme le produit en somme, le quotient en différence, la puissance en produit.

Méthodes : *z* réel $\Leftrightarrow \arg z = 0\left[2\pi\right]$

z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \pi\left[2\pi\right]$

IV Forme exponentielle

Introduction: on a vu en TD que la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ \theta\mapsto\cos\theta+i\sin\theta \end{array}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

- $f(\theta+\theta')=f(\theta)\cdot f(\theta')$
- $f'(\theta)=i\cdot f(\theta)$

Ces propriétés rappellent celles de l'exponentielle : $\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$ et $(\exp(ax))'=a\cdot\exp(a)$.

D'où la *Définition :*

- pour tout réel θ, on pose $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
- la forme exponentielle d'un nombre complexe est $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$, où r est le module de z, et θ est un argument de z.

Remarques/propriétés :

- La forme exponentielle n'est qu'une écriture plus compacte de la forme trigonométrique :
  $$r\mathrm{e}^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
- $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|=1$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\equiv\theta[2\pi]$
- La notation est cohérente avec les propriétés de l'exponentielle, en effet les propriétés du cours sur les arguments donnent :
  $\mathrm{e}^{i\theta}\cdot\mathrm{e}^{i\theta'}=\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$ *provient de* $\arg zz'\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]$
  $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}}=\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$ *provient de*
  $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{in\theta}$ *provient de*
- $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{-i\theta}$ *provient de*

Théorème : Formule de Moivre $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

Formules d'Euler $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$

Démonstrations assez immédiates :

- $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ *provient de*
- En utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus, détailler le calcul de :
  $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}=$
  $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}=$

Exemple : $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{2017}=\mathrm{e}^{2017\frac{\pi}{4}i}=\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{4}+252\times2\pi\right)i}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Applications :

- $\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}=\mathrm{e}^{i\theta}\cdot\mathrm{e}^{i\theta'}$ permet de retrouver $\begin{array}{l}\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cdot\cos\theta'-\sin\theta\cdot\sin\theta' \\ \sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cdot\cos\theta'+\cos\theta\cdot\sin\theta'\end{array}$
- $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2=\mathrm{e}^{i2\theta}$ permet de retrouver $\begin{array}{l}\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta \\ \sin(2\theta)=2\sin\theta\cdot\cos\theta\end{array}$

Ces calculs sont éventuellement à faire, pour comprendre la méthode (identification des parties réelles et imaginaires). Remarquez que ce n'est pas une preuve, puisqu'on a besoin des formules trigonométriques pour démontrer les propriétés sur les arguments, et non l'inverse.

V APPLICATIONS A LA GEOMETRIE.

1. Utilisation de la forme trigonométrique

a/ Utilisation du module : problèmes de longueurs

La propriété fondamentale est $\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|$

Exemples :

- Le cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M(z) tels que $\Omega\mathrm{M} = R \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = R$
- La médiatrice du segment [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et de B, soit $\mathrm{AM} = \mathrm{BM} \Leftrightarrow |z - z_\mathrm{A}| = |z - z_\mathrm{B}|$
- triangles divers, par exemple le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} \Leftrightarrow |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}| = |z_\mathrm{A} - z_\mathrm{C}|$
- parallélogrammes divers...

b/ Utilisation de l'argument : problèmes d'angles

Propriétés fondamentales : $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \arg\left(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}\right)[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right)[2\pi]$$

Exemples :

- (AB) perpendiculaire à (AC) $\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a}$ imaginaire pur
- A, B, C alignés $\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a}$ réel
- A comprendre ultérieurement : on peut mélanger utilisation du module et de l'argument :

  ABC est équilatéral si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\Leftrightarrow |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}| \text{ et } \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}|}{|z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

2. Racines de l'unité

Définition : l'ensemble des nombres complexes de module 1 est appelé cercle unité, et est noté $\mathbb{U}$. On a donc $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\right\}$.

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres de $\mathbb{U}$. On a alors :

$$zz' \in \mathbb{U} \qquad \frac{1}{z} \in \mathbb{U} \qquad \frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$$

Remarques :

- inutile de préciser $z \neq 0$ et $z' \neq 0$. Pourquoi ?
- $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse ; plus précisément ($\mathbb{U}$, $\times$) est un groupe (commutatif). En effet vous pouvez vérifier que les différentes propriétés qui définissent un groupe sont vraies dans $\mathbb{U}$ (exercice intéressant et facile pour ceux qui vont faire des mathématiques dans le supérieur).

Définition : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racines n-ièmes de l'unité les solutions de l'équation complexe $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces racines ; $\mathbb{U}_n = \left\{ z \in \mathbb{C}, z^n = 1 \right\}$.

Propriétés :

- $\mathbb{U}_n = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$. $\mathbb{U}_n$ comporte n éléments.
- Si $n \geq 3$, alors les images des racines n-ièmes de l'unité dans le plan forment un polygone régulier à n côtés, de centre O.

Remarques et exemples :

- Là encore, ($\mathbb{U}_n$, $\times$) est un groupe (commutatif).
- Les racines cubiques de l'unité ont des petits noms. $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1, j, j^2 \right\}$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- Quel est l'ensemble des racines carrées de l'unité ? Des racines quatrièmes de l'unité ?