Théorèmes de convergence sur les suites

* 1. Théorèmes de comparaison.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Hypothèse 1  Inégalité valable à partir d’un certain rang | Hypothèse 2  Comportement en +∞ | Conclusion |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

*Démonstration du premier théorème (ROC) : reprendre la démonstration du théorème équivalent sur les fonctions, faire un schéma.*

On rappelle la définition : la suite  admet *+∞* pour limite quand *n* tend vers +∞, si tout intervalle ouvert du type , avec *A* aussi grand que l’on veut, contient toutes les valeurs de  à partir d’un certain rang *N*.

* 1. Rappel : comportement des suites géométriques.

*Lemme*:  pour a réel positif et *n* entier naturel

*Démo*: par récurrence

*Théorème*: Soit  une suite géométrique de raison *q* et de premier terme  positif.

Si *q* > 1 alors  diverge vers +∞ ;

Si *q* = 1 alors  est constante et converge vers ;

Si -1 < *q* < 1 alors  converge vers 0 ;

Si *q* = -1 alors  diverge, en alternant entre  et ;

Si *q* < -1 alors  diverge (en allant alternativement vers +∞ et -∞) ;

*Démonstrations*: déjà faites, la 1ère est une ROC

* 1. Convergence des suites monotones.

*Théorème :* Si une suite  est croissante et admet *L* pour limite, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à *L*.

*Démonstration :* par l’absurde. Supposons qu’il existe  tel que  (le contraire de la conclusion ). Comme la suite admet *L* pour limite, l’intervalle , qui est un intervalle ouvert contenant *L*, doit donc contenir tous les termes de la suite à partir d’un certain rang *N*.

Mais comme la suite est croissante, tous les termes tels que  vérifient , et donc n’appartiennent pas à . Absurde.

*Théorème :* toute suite croissante majorée converge.

*Remarques :*

* Théorème admis.
* De manière équivalente, toute suite décroissante minorée converge.
* Dans ce paragraphe, seul ce théorème est exigible en théorie. Dans les faits, les autres peuvent être utiles pour certains sujets du bac.

*Théorème :* une suite croissante non majorée admet +∞ pour limite.

*Remarque* : de même, une suite décroissante non minorée admet -∞ pour limite.

*Démonstration*: Soit *A* un réel quelconque, aussi grand que l’on veut. Dire que  est non majorée, cela signifie que  « dépasse » *A* pour un certain rang *N* (sinon  serait majorée par *A*). Comme de plus  est croissante, on a  pour *n* ≥ *N*. Donc tous les termes de la suite  sont dans l’intervalle  à partir de *N*, CQFD (faire le schéma).

*Remarque*:

* pour vous entrainer, vous pouvez prouver le théorème : Toute suite convergente est bornée.
* La démonstration se fait par disjonction des cas :
  + D’une part l’intervalle  contient tous les termes à partir d’un rang *N* (pourquoi ?)
  + et les premiers termes sont bornés par leur min et max.
* D’où la contraposée à écrire :